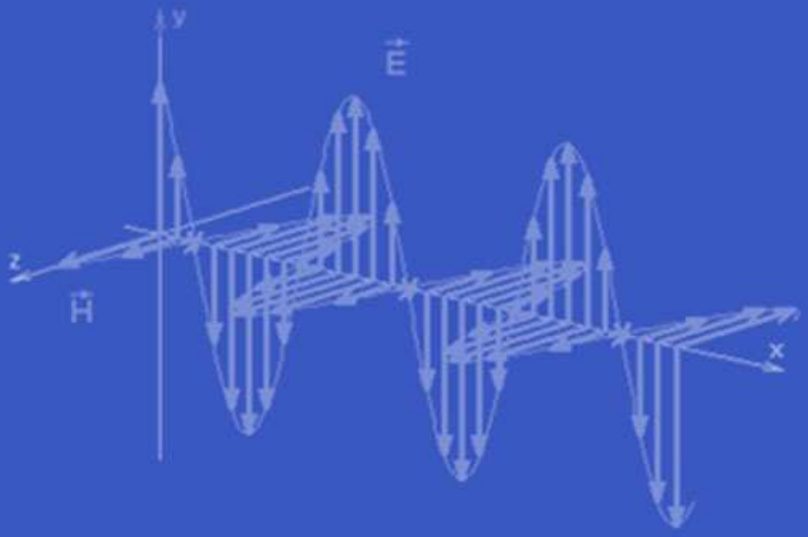
Electromagnetismo para Ingeniería Electrónica

Campos y ondas

Alejandro Paz Parra



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Cali

Electromagnetismo para Ingeniería Electrónica

Campos y ondas

Alejandro Paz Parra

Facultad de Ingeniería
2013

Rector: Jorge Humberto Peláez, S.J.
Vicerrector Académico: Ana Milena Yoshioka
Vicerrector del Medio Universitario: Luis Fernando Granados, S.J.

Facultad de Ingeniería
Decano Académico: Mauricio Jaramillo Ayerbe
Decano del Medio Universitario: Alberto Benavides Herrán
Directora del Departamento de Electrónica y Ciencias de la Computación: Gloria Inés Álvarez Vargas

Título: Electromagnetismo para Ingeniería Electrónica. Campos y ondas

Autor: Alejandro Paz Parra

ISBN 978-958-8347-79-0

Coordinador Editorial: Ignacio Murgueitio
e-mail: mignacio@javerianacali.edu.co

©Derechos Reservados
©Sello Editorial Javeriano

Correspondencia, suscripciones y solicitudes de canje:
Pontificia Universidad Javeriana
Calle 18 No. 118-250, Vía Pance
Facultad de Ingeniería
Teléfonos (57-2) 3218200 Ext.: 8416/8493
e-mail: @javerianacali.edu.co

Formato 21 x 27cms

Diseño: Edith Valencia F.
Impresión: marzo de 2013
Centro de Multimedios PUJ-Cali

Electromagnetismo para Ingeniería Electrónica

Campos y ondas

Alejandro Paz Parra

Paz Parra, Alejandro
Electromagnetismo para ingeniería electrónica : campos y ondas / Alejandro Paz Parra -- Santiago de Cali : Pontificia Universidad Javeriana, Sello Editorial Javeriano, 2013.
401 p. : il. ; 27 cm.

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN 978-958-8347-79-0

1. Campos electromagnéticos 2. Ondas electromagnéticas 3. Cálculo vectorial 4. Electrodinámica I. Pontificia Universidad Javeriana (Cali). Facultad de Ingeniería. Departamento de Electrónica y Ciencias de la Computación

SCDD 537.6226 ed. 23 BPUJC
malc/13

A Pilar, Juan Fernando y César Augusto,
los amo profundamente

La belleza de la ciencia

"El científico no estudia la naturaleza por la utilidad que le pueda reportar; la estudia por el gozo que le proporciona, y este gozo se debe a la belleza que hay en ella. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena su estudio, y si no valiera la pena conocerla, la vida no merecería ser vivida.

Por supuesto que no hablo aquí de aquella belleza que impresiona los sentidos, la belleza de las cualidades y apariencias; y no es que desprecie esta belleza (lejos de mí tal cosa), pero no es esta la propia de la ciencia; me refiero a aquella profunda belleza que surge de la armonía del orden en sus partes y que una pura inteligencia puede captar.

La belleza intelectual se basta a sí misma, y es por ella, más que quizá por el bien futuro de la humanidad, por lo que el científico consagra su vida a un trabajo largo y difícil."

Henri Poincare

Contenido

Fundamentos de Cálculo Vectorial 11
- Introducción 11
- Representación de vectores 11
- Operaciones vectoriales básicas 13
- Suma y diferencia de vectores 14
- Producto escalar 16
- Producto vectorial 20
- Sistemas de Coordenadas Curvilíneas 23
- El Sistema de Coordenadas Cilíndricas 23
- El Sistema de Coordenadas Esféricas 28
- El Diferencial de Longitud 35
- Diferencial de Longitud en Coordenadas Cartesianas 36
- Diferencial de Longitud en Coordenadas Cilíndricas 36
- Diferencial de Longitud en Coordenadas Esféricas 38
- El operador gradiente 38
- Ejercicios del capítulo 40
- Respuestas de los ejercicios 42
- Para los que desean saber más 42

Introducción a la Teoría de Campos 45
- Introducción 45
- Definición de campo 45
- Campo Escalar 46
- Modelo matemático 46
- Superficies y curvas equipotenciales 47
- Campo Vectorial 49
- Modelo matemático 50
- Líneas de Fuerza 51
- Circulación y Rotacional 53
- Campos conservativos y no conservativos 55
- Teorema de Stokes 56
- Flujo y divergencia 58
- Teorema de la Divergencia 60
- Ejercicios del capítulo 61
- Respuestas de los ejercicios 63
- Para los que desean saber más 63

Teoría del Campo Electrostático 65
- Introducción 65
- Fundamentos del Campo Eléctrico 65
- Ley de Coulomb 65
- Definición de Campo Eléctrico 66
- Unidades de medida del Campo Eléctrico 67
- Líneas de Fuerza del Campo Eléctrico 68
- Energía y potencial eléctrico 69
- El dipolo eléctrico elemental 74
- Propiedades del Campo Electrostático 79
- Circulación y Rotacional 79

Flujo y divergencia 80
Propiedades de materiales en presencia del Campo Electrostático 83
Propiedades de los dieléctricos 83
Propiedades de los conductores 91
Condiciones de frontera 92
Condiciones de frontera de Dirichlet y Newmann 92
Frontera dieléctrico - conductor 93
Frontera dieléctrico- dieléctrico 94
Funcionamiento del sistema pararrayos 98
Ecuaciones de Poisson y de Laplace. 100
Ejercicios del capítulo 103
Respuestas a los ejercicios 106
Para los que desean saber más 106

Flujo de corriente eléctrica en medios físicos 109
Introducción 109
Principios generales 109
Densidad de portadores libres 110
Movilidad de portadores libres 112
Densidad de corriente eléctrica 114
Conductividad y resistividad eléctrica 116
Relación entre la resistividad y la temperatura 118
Intensidad de corriente eléctrica 120
Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica 122
Condiciones de frontera 126
Ley de Ohm y cálculo de resistencia 127
Potencia eléctrica y efecto Joule 130
Ejercicios del capítulo 132
Respuestas a los ejercicios 134
Para los que desean saber más 135

Magnetostática 137
Introducción 137
Fuentes del campo magnético 137
Ley de Coulomb para fuerzas magnéticas 138
Flujo y densidad de flujo magnético 140
Intensidad de campo magnético 142
Ley de Biot-Savart 143
Ley Circuital de Ampere 151
Permeabilidad magnética 152
Condiciones de frontera 153
Propiedades de los materiales magnéticos 154
Clasificación de los materiales según sus propiedades magnéticas 156
Materiales diamagnéticos 156
Materiales paramagnéticos 158
Materiales antiferromagnético 160
Materiales ferromagnético 161
Materiales ferrimagnéticos 167
Factores que afectan la susceptibilidad magnética 168
Temperatura 168
Frecuencia 170
Potencial magnético escalar 173

Potencial magnético vectorial 174
Ejercicios del capítulo 177
Respuestas de los ejercicios 179
Para los que desean saber más 179

Electrodinámica y Ondas 181
Introducción 181
Ley de Inducción de Faraday 181
Corriente de desplazamiento 185
Corriente en un condensador 189
Modelo de un condensador real 191
Tangente de pérdidas de un medio 196
Clasificación de medios según la tangente de pérdidas 198
Ondas electromagnéticas en dieléctricos perfectos 200
Impedancia intrínseca 206
Velocidad de propagación 207
Índice de refracción 209
Constante de fase 210
Longitud de onda 211
Ondas electromagnéticas en medios disipativos. 212
Velocidad de propagación 215
Impedancia intrínseca 216
Profundidad de penetración 218
Longitud de onda 220
Ondas en buenos aislantes 222
Ondas en buenos conductores 224
Efecto superficial 226
Efecto piel y resistencia AC 229
Parámetros de propagación en medios abiertos 232
El espectro electromagnético y las bandas de referencia 234
Potencia eléctrica transmitida a través de ondas electromagnéticas 236
El vector de Poynting 236
Potencia en valores RMS 239
Pérdidas por propagación en un medio disipativo 240
Atenuación en decibeles 241
Ejercicios del capítulo 244
Respuestas a los ejercicios 246
Para los que desean saber más 247

Ondas en medios abiertos acotados 249
Introducción 249
Modos de propagación de ondas electromagnéticas 249
Polarización de ondas EM 252
Polarización lineal 252
Polarización circular 253
Polarización elíptica 254
Incidencia sobre un plano normal 256
Coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión 259
Potencia incidente y reflejada 262
Reflexión total y ondas estacionarias 264
Reflexión parcial 268
Relación de onda estacionaria ROE 272

Impedancia de entrada de una pared infinita 274
Propagación a través de una pared finita 278
Impedancia de entrada normalizada 281
Incidencia oblicua 283
Ley de Snell 284
Reflexión total 286
Modos de polarización TE, TM y TEM 287
Coeficientes de Fresnel en polarización TE 290
Coeficientes de Fresnel en polarización TM 293
Ángulo de refracción total – polarización TM 296
Coeficientes de Fresnel complejos 298
Reflectancia y transmitancia 300
Ejercicios del capítulo 304
Respuestas a los ejercicios 308
Para los que desean saber más 309

Ondas electromagnéticas en medios guiados 311
Introducción 311
Líneas de transmisión 311
Tipos de líneas de transmisión 311
Parámetros eléctricos de líneas de transmisión 313
Modelos de líneas de transmisión 321
Modelos de parámetros concentrados 321
Modelos de parámetros distribuidos 323
Modelos reducidos de parámetros distribuidos 326
Propagación en líneas de transmisión acotadas 330
Impedancia de entrada en líneas de transmisión acotadas 333
Impedancia de entrada normalizada 335
Máximos y mínimos de voltaje 340
Relación de onda estacionaria 343
Potencia y pérdidas en líneas de transmisión 345
Reflectancia y transmitancia 345
Transformador de impedancias $\lambda/4$ 348
Métodos gráficos – La carta de Smith 349
Construcción 349
Cálculo de la impedancia de entrada de una línea mal acoplada 355
Parámetros de transmisión 356
Diagrama de admitancia 360
Cálculo de acoples reactivos usando carta de Smith 366
Acople reactivo a partir de secciones del mismo conductor 370
Guías de onda 372
Principios de propagación 374
Guías de onda rectangulares 375
Método gráfico para determinar modos de propagación 380
Parámetros de propagación 381
Impedancia intrínseca 386
Potencia y pérdidas en guías de onda rectangulares 388
Guías de onda circulares 392
Propagación en fibra óptica 395
Ejercicios del capítulo 397
Respuestas a los ejercicios 399
Para los que desean saber más 401

Capítulo 1

Fundamentos de Cálculo Vectorial

Introducción

El Cálculo Vectorial es una herramienta fundamental para el modelado de las interacciones de naturaleza electromagnética, las cuales se encuentran representadas en su forma más general por vectores de fuerza.

En el presente capítulo se presenta un resumen de las ecuaciones fundamentales del Cálculo Vectorial y de la Teoría de Campos, necesarias para desarrollar un modelo matemático del comportamiento de los fenómenos de naturaleza electromagnética en condiciones estáticas y dinámicas.

Se presenta también un resumen de los diversos sistemas de coordenadas usados para modelar y resolver diferentes problemas de electromagnetismo.

Representación de vectores

En el sistema de Coordenadas Cartesianas, la posición de un punto en el espacio se encuentra determinada por tres números que definen las distancias mínimas entre el punto y tres planos de referencia, los cuales forman ángulo recto entre sí llamados planos coordenados, por lo que este sistema también suele llamarse Sistema de Coordenadas Rectangulares.

En la figura 1 se pueden observar los tres planos coordenados que forman ángulos rectos entre sí y cuyas intersecciones se denominan ejes coordenados.

Las distancias perpendiculares medidas a los planos coordenados constituyen las coordenadas de la posición del punto dado.

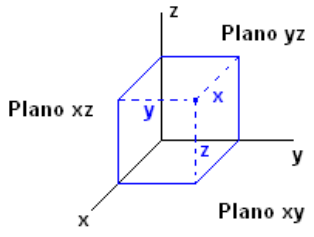


Figura 1. Sistema de Coordenadas Cartesianas

Para la representación de vectores en el Sistema Cartesiano, se usa un conjunto de tres vectores unitarios, cada uno de los cuales apunta en dirección de un eje coordenado según se muestra en la figura 2.

Estos tres vectores se denominan vectores directores del Sistema Cartesiano.

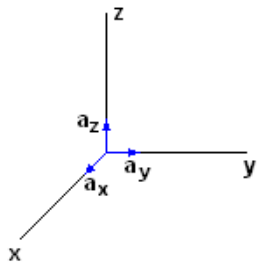


Figura 2. Vectores unitarios del Sistema de Coordenadas Cartesianas

Para representar adecuadamente un vector en Coordenadas Cartesianas se usan las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados y los tres vectores directores.

$$\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$

Donde, A_x, A_y, A_z son las proyecciones del vector **A** sobre los ejes coordenados **x, y**, **z,** respectivamente, y $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ son los vectores unitarios directores del sistema de Coordenadas Cartesianas.

Ejemplo 1. Representación de un vector en función de los vectores directores.

Dado el vector $P = (-2,1,-3)$ exprese dicho vector en función de los vectores directores.

Solución:

El vector dado se puede representar como:

$$P = -2\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} - 3\overrightarrow{a_z}$$

El vector posición de cualquier punto en Coordenadas Cartesianas, entendido como el vector extendido desde el origen de coordenadas hasta el punto de referencia, viene dado por:

$$\vec{X} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$

Ecuación 1. Vector posición de un punto en Coordenadas Cartesianas

Ejemplo 2. Vector posición y velocidad en función de los vectores directores.
Una partícula se mueve de tal forma que su posición se encuentra determinada por el vector:

$$p = (t^2 - 2)\overrightarrow{a_x} + t\overrightarrow{a_y} - 3t^2\overrightarrow{a_z}$$

Obtenga el vector de velocidad, la aceleración y la rapidez instantánea de la partícula en t=0.5 seg.

Solución:

El vector velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo, por lo tanto:

$$v = \frac{dp}{dt} = 2(t-1)\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} - 6t\overrightarrow{a_z}$$

A su vez, el vector de aceleración es la primera derivada temporal de la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2\overrightarrow{a_x} - 6\overrightarrow{a_z}$$

La rapidez instantánea es la magnitud de la velocidad en el instante de tiempo dado:

$$r(t) = |v(t)| = \sqrt{4(t-1)^2 + 1 + 36t^2}$$

Evaluando en el instante dado: $r(0.5seg) = \sqrt{11}$

Operaciones vectoriales básicas

Las operaciones vectoriales fundamentales son la combinación lineal de vectores, que pasa por la suma y diferencia de los mismos, el producto vectorial y el producto escalar.

Cuando un vector es combinación lineal de otros dos, el cálculo de dicha combinación viene determinado por:

$$A = k_1 B + k_2 C$$

En donde el vector A es el vector compuesto y los vectores B y C son los componentes del vector A.

En el caso más general, todo vector puede ser descrito en términos de diferentes componentes como:

$$A = \sum_{i=1}^{n} k_i A_i$$

Suma y diferencia de vectores

La suma de vectores es una operación en la cual se obtiene un vector suma; producto de la suma de las componentes de los vectores involucrados, denominados sumandos.

Geométricamente, la suma de dos vectores queda definida por la Ley del Paralelogramo, tal como se muestra en la figura 3.

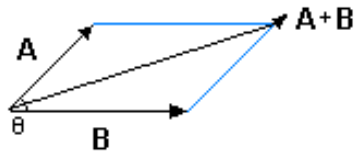


Figura 3. Suma de vectores

En forma semejante, la diferencia de vectores se obtiene invirtiendo el vector que actúa como sustraendo, esto es multiplicándolo por -1, y sumándolo al vector que actúa como minuendo, tal como se observa en la figura 4.

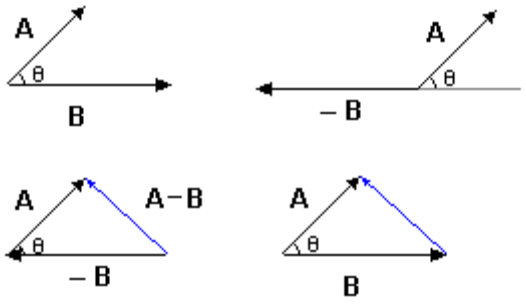


Figura 4. Diferencia de vectores

Matemáticamente, la suma y diferencia de vectores se obtiene a través de las componentes rectangulares de los vectores implicados, de la siguiente forma:

$$A = B + C = (A_x + B_x)\overrightarrow{a_x} + \left(A_y + B_y\right)\overrightarrow{a_y} + (A_z + B_z)\overrightarrow{a_z}$$

$$A = B - C = (A_x - B_x)\overrightarrow{a_x} + \left(A_y - B_y\right)\overrightarrow{a_y} + (A_z - B_z)\overrightarrow{a_z}$$

Ejemplo 3. Aplicación de la suma de vectores.
Sobre un mismo cuerpo actúan simultáneamente dos fuerzas diferentes:

$$F_1 = 2\overrightarrow{a_x} - \overrightarrow{a_y} + 3\overrightarrow{a_z} \qquad F_2 = -\overrightarrow{a_x} + 2\overrightarrow{a_y} - \overrightarrow{a_z}$$

Encuentre la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo.

Solución:

La fuerza resultante sobre un cuerpo es la suma de todas las fuerzas que actúan simultáneamente sobre él:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2$$

$$F = (2-1)\overrightarrow{a_x} + (-1+2)\overrightarrow{a_y} + (3-1)\overrightarrow{a_z}$$

$$F = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} + 2\overrightarrow{a_z}$$

Ejemplo 1. Aplicación de la diferencia de vectores.
Una partícula se mueve de tal forma que su posición se encuentra determinada por el vector:

$$p = (t^2 - 2)\overrightarrow{a_x} + t\overrightarrow{a_y} - 3t^2\overrightarrow{a_z}$$

Obtenga el vector de velocidad media en el intervalo $t = [1,2]seg$

Solución:

A diferencia de la velocidad instantánea, la velocidad media se mide como el cambio de posición sobre el cambio de tiempo, eso es:

$$v_m = \frac{p_f - p_i}{t_f - t_i}$$

Para el caso presentado:

$$p_f = p(2seg) = 2\overrightarrow{a_x} + 2\overrightarrow{a_y} - 12\overrightarrow{a_z}$$

$$p_i = p(1seg) = -\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} - 3\overrightarrow{a_z}$$

$$v_m = \frac{\left(2\overrightarrow{a_x} + 2\overrightarrow{a_y} - 12\overrightarrow{a_z}\right) - \left(-\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} - 3\overrightarrow{a_z}\right)}{2seg - 1seg}$$

$$v_m = 3\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} - 9\overrightarrow{a_z} \;\; m/s$$

Producto escalar

El producto escalar en su expresión más simple está definido por la ecuación:

$$A \bullet B = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \, Cos\theta$$

En donde θ es el ángulo formado por los dos vectores en el espacio.

Hay varias propiedades que se pueden deducir a partir de la definición del producto escalar considerando casos especiales:

- El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su magnitud.

$$A \cdot A = |A||A|Cos(0) = |A|^2$$

- El producto escalar de dos vectores perpendiculares entre sí es igual a cero.

$$Si\ A \perp B \implies A \cdot B = |A||B|Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- El producto escalar dos vectores paralelos entre sí es igual al producto de sus magnitudes.

$$Si\ A \parallel B \implies A \cdot B = |A||B|Cos(0) = |A||B|$$

A partir de estas propiedades, se puede inferir que el producto escalar entre los vectores directores del Sistema Cartesiano es nulo para dos vectores diferentes y es igual a la unidad para el caso del mismo vector.

$$\overrightarrow{a_x} \cdot \overrightarrow{a_x} = \overrightarrow{a_y} \cdot \overrightarrow{a_y} = \overrightarrow{a_z} \cdot \overrightarrow{a_z} = 1$$

$$\overrightarrow{a_x} \cdot \overrightarrow{a_y} = \overrightarrow{a_y} \cdot \overrightarrow{a_z} = \overrightarrow{a_z} \cdot \overrightarrow{a_x} = 0$$

Adicionalmente, el producto escalar de vectores permite calcular el ángulo subtendido por ellos en el espacio, sin necesidad de hacer abstracción geométrica de los vectores.

El ángulo subtendido por dos vectores en el espacio se encuentra siempre en el dominio 0 – π, por lo que un producto escalar negativo indica que este ángulo se encuentra en el segundo cuadrante; un producto escalar positivo indica que el ángulo se encuentra en el primer cuadrante; pero en el caso en el cual los vectores son ortogonales el producto escalar es nulo.

El producto escalar de vectores también cumple la propiedad distributiva con respecto a la suma.

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

Esta ecuación permite calcular el producto escalar de dos vectores con base en sus componentes rectangulares:

$$\vec{A}=A_x\,\vec{a}_x+A_y\,\vec{a}_y+A_z\,\vec{a}_z \qquad\qquad \vec{B}=B_x\,\vec{a}_x+B_y\,\vec{a}_y+B_z\,\vec{a}_z$$

$$A\cdot B=\left(A_x\overrightarrow{a_x}+A_y\overrightarrow{a_y}+A_z\overrightarrow{a_z}\right)\cdot\left(B_x\overrightarrow{a_x}+B_y\overrightarrow{a_y}+B_z\overrightarrow{a_z}\right)$$

Aplicando la propiedad distributiva y eliminando los componentes nulos se obtiene:

$$A\cdot B=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

Producto escalar en función de las componentes rectangulares

Ejemplo 5. Producto escalar de vectores.

Calcule el producto escalar de los vectores $\vec{A}=(5,-2,1)$ y $\vec{B}=(-1,3,-2)$.

Solución:

Se puede calcular el producto escalar como:

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=(5)(-1)+(-2)(3)+(1)(-2)=-13$$

Ejemplo 6. Cálculo del ángulo entre dos vectores usando el producto escalar.

Calcule el ángulo formado por los vectores del ejemplo 5.

Solución:

Se puede expresar el producto escalar como: $\vec{A}\bullet\vec{B}=|A|\,|B|\;Cos\theta$

De donde se deduce que: $\theta=Cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|A|\,|B|}\right)$

En el ejemplo 5 se tiene que: $|A|=\sqrt{30}\quad |B|=\sqrt{14}$

Por lo tanto: $\theta=Cos^{-1}\left(\dfrac{-13}{\sqrt{30}\sqrt{14}}\right)=129^0$

A partir de dos vectores A y B, ubicados como se muestra en la figura 4, es posible deducir otra relación geométrica importante en el producto escalar.

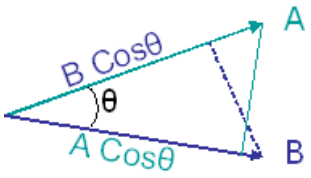


Figura 5. Proyección escalar de un vector sobre otro

El producto escalar equivale a la relación:

$$A \cdot B = |A||B|Cos\theta$$

Cuando se usa esta relación se puede calcular la proyección de un vector sobre otro con base en el producto escalar y las proyecciones mostradas en la figura 5.

$$\text{Pr}oy_A B = \frac{A \cdot B}{|A|} \qquad \text{Pr}oy_B A = \frac{A \cdot B}{|B|}$$

Proyección escalar de un vector sobre otro usando el producto escalar.

La interpretación geométrica del producto escalar como proyección de un vector sobre otro resulta altamente útil cuando uno o dos de los vectores se hacen unitarios, en este caso, la magnitud de **A** o de **B** se hacen "1" y la proyección se reduce simplemente al producto escalar de vectores.

Cuando se desea calcular la componente normal o tangencial de un vector sobre una superficie dada, basta con encontrar un vector unitario normal o tangencial a dicha superficie y multiplicarlo mediante producto escalar con el vector deseado.

Ejemplo 7. Cálculo de la proyección escalar de un vector sobre otro.

Calcule la proyección escalar del vector A sobre el vector B en el ejemplo 5.

Solución:

Se puede expresar la proyección de un vector sobre otro en función del producto escalar como:

$$\mathrm{Pr}oy_B A = \frac{A \cdot B}{|B|}$$

Usando los valores del ejemplo 6:

$$\mathrm{Pr}oy_B A = \frac{-13}{\sqrt{14}} = -3.47$$

Se puede también calcular una proyección vectorial si se toma la proyección escalar obtenida en el ejemplo 7, y se multiplica por un vector unitario en la dirección de B.

Ejemplo 8. Cálculo de la proyección vectorial de un vector sobre otro.

Calcule la proyección vectorial del vector A sobre el vector B en el ejemplo 5.

Solución:

Usando los valores del ejemplo 5 se calcula un vector unitario en la dirección de B:

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{B}}{|B|} = \frac{(-1,3,-2)}{\sqrt{14}} = (-0.267, 0.802, -0.535)$$

Se toma este vector unitario y se multiplica por la proyección escalar:

$$\mathrm{Pr}\vec{oy}_B A = -3.47(-0.267, 0.802, -0.535) = (0.93, -2.78, 1.85)$$

Producto vectorial

El producto vectorial es una operación entre vectores, en la cual el resultado es un vector perpendicular a los vectores operados y cuya magnitud se encuentra establecida por:

$$|A \times B| = |A||B|Sen\theta$$

Ecuación 2. Magnitud del producto vectorial de dos vectores

En donde θ es el ángulo formado por los dos vectores en el espacio.

La dirección y el sentido del producto vectorial se definen de acuerdo con la ley de la mano derecha: se extienden los dedos de la mano derecha hacia el primer operando y luego se cierran hacia el segundo, el pulgar de la mano queda dirigido en el sentido del producto vectorial como se muestra en la figura 6.

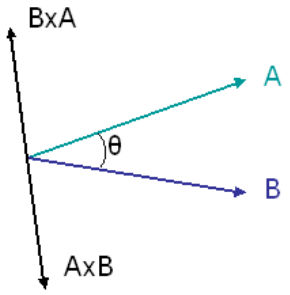


Figura 6. Producto vectorial

Esta ley de la mano derecha presupone, entonces, que el producto vectorial no cumple la propiedad conmutativa, por lo menos en lo que a dirección y sentido se refiere.

Sin embargo, como se puede observar en la figura 6, se cumple una propiedad diferente expresada como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Ecuación 3. Anti conmutatividad del producto vectorial

Hay varias propiedades que se pueden deducir a partir de la ecuación 2 considerando casos especiales:

- El producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo.

$$|A \times A| = |A||A|Sen(0) = 0$$

- La magnitud del producto vectorial de dos vectores perpendiculares entre sí es igual al producto de sus magnitudes.

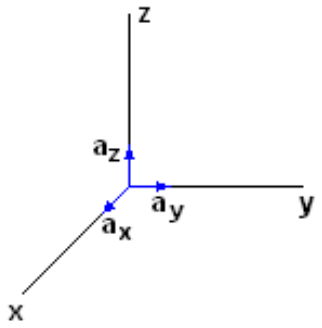
$$Si\ A \perp B \implies |A \times B| = |A||B|Sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = |A||B|$$

- El producto vectorial dos vectores paralelos entre sí es nulo.

$$Si\ A \parallel B \implies |A \times B| = |A||B|Sen(0) = 0$$

A partir de estas propiedades, se puede inferir que el producto vectorial entre los vectores directores del Sistema Cartesiano es nulo para dos vectores diferentes, y es igual a la unidad para el caso del mismo vector, quedando por definir la dirección de acuerdo con la ley de la mano derecha.

$$\overrightarrow{a_x} \times \overrightarrow{a_x} = \overrightarrow{a_y} \times \overrightarrow{a_y} = \overrightarrow{a_z} \times \overrightarrow{a_z} = 0$$



$$\overrightarrow{a_x} \times \overrightarrow{a_y} = \overrightarrow{a_z} \qquad \overrightarrow{a_y} \times \overrightarrow{a_z} = \overrightarrow{a_x} \qquad \overrightarrow{a_z} \times \overrightarrow{a_x} = \overrightarrow{a_y}$$

$$\overrightarrow{a_y} \times \overrightarrow{a_x} = -\overrightarrow{a_z} \qquad \overrightarrow{a_z} \times \overrightarrow{a_y} = -\overrightarrow{a_x} \qquad \overrightarrow{a_x} \cdot \overrightarrow{a_z} = -\overrightarrow{a_y}$$

El producto vectorial, al igual que el producto escalar, cumple la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

Ejemplo 9. Aplicación de la propiedad distributiva del producto vectorial en Coordenadas Cartesianas.

Calcule el producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ dados los vectores $\vec{A}=2\vec{a}_x-3\vec{a}_z$ y $\vec{B}=\vec{a}_y-\vec{a}_z$

Solución:

El problema se puede resolver aplicando la propiedad distributiva:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(2\vec{a}_x-3\vec{a}_z\right)\times\left(\vec{a}_y-\vec{a}_z\right)$$

Se aplica la propiedad distributiva

$$\vec{A}\times\vec{B}=2\vec{a}_x\times\vec{a}_y-2\vec{a}_x\times\vec{a}_z-3\vec{a}_z\times\vec{a}_y+3\vec{a}_z\times\vec{a}_z$$

Se anulan las componentes nulas y se obtiene:

$$\vec{A}\times\vec{B}=3\vec{a}_x+2\vec{a}_y+2\vec{a}_z$$

Se puede obtener una ecuación para el producto vectorial a través de las componentes rectangulares de los de los mismos a partir de la propiedad distributiva:

$$\vec{A}=A_x\vec{a}_x+A_y\vec{a}_y+A_z\vec{a}_z \qquad\qquad \vec{B}=B_x\vec{a}_x+B_y\vec{a}_y+B_z\vec{a}_z$$

$$A\times B=\left(A_x\overrightarrow{a_x}+A_y\overrightarrow{a_y}+A_z\overrightarrow{a_z}\right)\times\left(B_x\overrightarrow{a_x}+B_y\overrightarrow{a_y}+B_z\overrightarrow{a_z}\right)$$

Aplicando la propiedad distributiva y eliminando los componentes nulos queda:

$$A\times B=A_xB_y\left(\overrightarrow{a_x}\times\overrightarrow{a_y}\right)+A_xB_z(\overrightarrow{a_x}\times\overrightarrow{a_z})+A_yB_x\left(\overrightarrow{a_y}\times\overrightarrow{a_x}\right)+A_yB_z\left(\overrightarrow{a_y}\times\overrightarrow{a_z}\right)$$

$$+A_zB_x(\overrightarrow{a_z}\times\overrightarrow{a_x})+A_zB_y\left(\overrightarrow{a_z}\times\overrightarrow{a_y}\right)$$

Reemplazando por los productos vectoriales de los vectores directores se obtiene:

$$A\times B=A_xB_y\overrightarrow{a_z}-A_xB_z\overrightarrow{a_y}-A_yB_x\overrightarrow{a_z}+A_yB_z\overrightarrow{a_x}+A_zB_x\overrightarrow{a_y}-A_zB_y\overrightarrow{a_x}$$

Agrupando por factor común se obtiene:

$$A\times B=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\overrightarrow{a_x}\ -\ \left(A_xB_z-A_zB_x\right)\overrightarrow{a_y}\ +\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\overrightarrow{a_z}$$

Producto vectorial en función de las componentes rectangulares

Esta ecuación resulta un poco difícil de aprender, por lo que suele abreviarse en una forma matricial usando el siguiente determinante:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{a_x} & \overrightarrow{a_y} & \overrightarrow{a_z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

El cual arroja el mismo resultado.

Ejemplo 10. Cálculo del producto vectorial entre dos vectores a través del determinante.

Calcule el producto vectorial de $A=(3,1,-2)$ y $B=(1,-2,-1)$

Solución:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{a_x} & \overrightarrow{a_y} & \overrightarrow{a_z}\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=-5\overrightarrow{a_x}+\overrightarrow{a_y}-7\overrightarrow{a_z}$$

Sistemas de Coordenadas Curvilíneas

Se conocen como Sistemas de Coordenadas Curvilíneaslos que no usan el Sistema Cartesiano de distancias mínimas a planos coordenados, equivalentes a líneas rectas, sino que usan en su lugar ángulos o superficies como hiperboloides, esferas y cilindros para establecer la posición de un determinado punto en el espacio.

Este tipo de sistemas tiene una gran aplicación práctica en electromagnetismo dado que no siempre los sistemas analizados tienen una simetría rectangular.

El Sistema de Coordenadas Cilíndricas

Este Sistema de Coordenadas utiliza como base el de coordenadas las polares en 2D proyectado hacia el espacio usando la coordenada **z** del Sistema de Coordenadas Cartesianas.

En este sistema, las coordenadas **x** e **y** son reemplazadas por una primera coordenada que indica la distancia del punto al eje **z** y que se simboliza por **r**.

Esta coordenada se encuentra representada en un vector dirigido desde el origen hasta la proyección del punto sobre el plano **XY**, tal como se muestra en la figura 7.

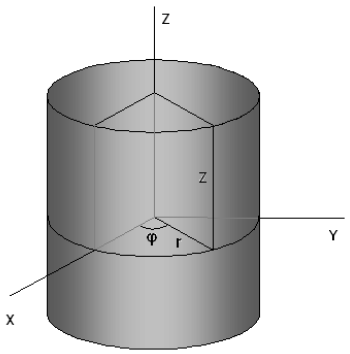


Figura 7. Sistema de Coordenadas Cilíndricas

La segunda coordenada del sistema la constituye el ángulo que el vector **r** forma con el semieje **x** positivo y se usa como tercera coordenada la misma coordenada **z** del Sistema Cartesiano.

La relación entre los Sistema de Coordenadas Cilíndricas y Cartesianas se encuentra determinada por la ecuación 4.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = z$$

Ecuación 4. Transformación de Coordenadas Cartesianas a Cilíndricas

Ejemplo 11. Transformación de Coordenadas Cartesianas a Cilíndricas.

Dado un punto en Cartesianas (-3,-4,5), encuentre las Coordenadas Cilíndricas correspondientes al punto dado.

Solución:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-3}\right) = -127^0 \quad z = 5$$

A su vez, la transformación de Coordenadas Cilíndricas a Cartesianas se encuentra determinada por la ecuación 5.

$$x = r\,Cos\varphi \quad y = r\;Sen\varphi \quad z = z$$

Ecuación 5. Transformación de Coordenadas Cilíndricas a Cartesianas

Ejemplo 12. Transformación de Coordenadas Cilíndricas a Cartesianas.

Dado un punto en Cartesianas (-3, -4, 5), encuentre las Coordenadas Cilíndricas correspondientes al punto dado.

Dado un punto ubicado en $r = 3 \quad \varphi = \frac{5\pi}{6} \quad z = -1$, hallar las Coordenadas Cartesianas.

Solución:

$$x = 3 \times Cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2.6$$
$$y = 3 \times Sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1.5$$
$$z = -1$$

En este sistema, al igual que en el cartesiano, existen tres vectores directores que permiten indicar la dirección y sentido de cualquier vector.

- El vector $\overrightarrow{a_r}$, que se dirige en la dirección de incremento de la distancia r.
- El vector $\overrightarrow{a_\varphi}$, que se dirige en la dirección de incremento del ángulo φ.
- El vector $\overrightarrow{a_z}$, que se dirige en la dirección de incremento de la distancia z.

La figura 8, ilustra los tres vectores directores del sistema.

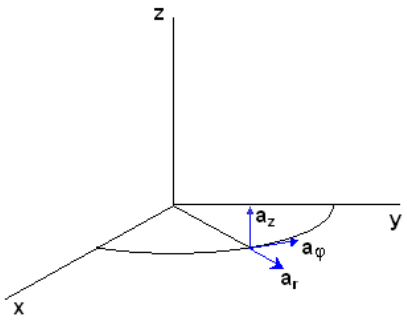


Figura 8. Vectores directores del Sistema de Coordenadas Cilíndricas

Un vector en Coordenadas Cilíndricas queda definido por:

$$\vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\varphi \vec{a}_\varphi + A_z \vec{a}_z$$

Donde A_r es la proyección radial del vector con respecto al eje **z** sobre el plano **XY**; A_φ es la componente angular, medida con respecto al semieje **x** positivo, y A_z coincide con la componente cartesiana del mismo nombre.

El vector posición de cualquier punto en las Coordenadas Cilíndricas queda definido por:

$$\vec{X} = r\,\vec{a}_r + z\,\vec{a}_z \quad ; \quad \varphi = \varphi_0$$

Una diferencia importante entre los vectores directores del Sistema Cartesiano que son constantes e independientes de las coordenadas y los vectores $\vec{a}_r$ y $\vec{a}_\varphi$ del Sistema de Coordenadas Cilíndricas, es que estos últimos cambian de dirección de acuerdo con la coordenada φ; por lo que no pueden tomarse como constantes en ningún caso.

En la ecuación 6 se muestra la matriz de transformación de vectores expresados en Coordenadas Cilíndricas a Coordenadas Cartesianas y en la ecuación 7 se encuentra la matriz de transformación inversa.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi & -Sen\varphi & 0 \\ Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

Ecuación 6. Transformación de vectores de Coordenadas Cilíndricas a Cartesianas

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi & Sen\varphi & 0 \\ -Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Ecuación 7. Transformación de vectores de Coordenadas Cartesianas a Cilíndricas

Ejemplo 13. Transformación de vectores expresados en Coordenadas Cilíndricas a Cartesianas.

Exprese los vectores $\vec{a}_\varphi$ y $\vec{a}_r$ en Coordenadas Cartesianas y calcule sus componentes para

$$\varphi = \pi/4$$

Solución:

De la matriz de transformación de la

Ecuación 6 para la transformación de $\vec{a}_\varphi$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi & -Sen\varphi & 0 \\ Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Sen\varphi \\ Cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto: $\vec{a}_{\varphi} = -Sen\varphi\,\vec{a}_x + Cos\varphi\,\vec{a}_y$

Para el caso de $\vec{a}_r$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi & -Sen\varphi & 0 \\ Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi \\ Sen\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto: $\vec{a}_r = Cos\varphi\,\vec{a}_x + Sen\varphi\,\vec{a}_y$

Reemplazando el ángulo se tiene:

$$\vec{a}_{\varphi}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -Sen\left(\pi/4\right)\vec{a}_x + Cos\left(\pi/4\right)\vec{a}_y = -0.7\,\vec{a}_x + 0.7\,\vec{a}_y$$

$$\vec{a}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = Cos\left(\pi/4\right)\vec{a}_x + Sen\left(\pi/4\right)\vec{a}_y = 0.7\,\vec{a}_x + 0.7\,\vec{a}_y$$

Ejemplo 14. Transformación de funciones vectoriales de Coordenadas Cilíndricas a Cartesianas.

Dada una función vectorial $\vec{A} = 3rSen^2\varphi\,\vec{a}_r + 3rSen\varphi Cos\varphi\,\vec{a}_{\varphi} + 3z\,\vec{a}_z$

Exprese la función en Coordenadas Cartesianas

Solución:

A partir de la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi & -Sen\varphi & 0 \\ Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3rSen^2\varphi \\ 3rSen\varphi Cos\varphi \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3rSen\varphi \\ 3z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

La función vectorial queda: $\vec{A} = 3y\,\vec{a}_y + 3z\,\vec{a}_z$

El Sistema de Coordenadas Esféricas

En el Sistema de Coordenadas Esféricas se utilizan tres coordenadas para notar la posición de un punto o un vector en un espacio tridimensional, dos de estas coordenadas son angulares y una de ellas es una distancia.

La primera coordenada es la longitud de un vector (**R**) que une el origen de coordenadas con el punto dado. La segunda coordenada es el ángulo que este vector forma con el semieje z positivo (**θ**). La tercera coordenada es el ángulo que la proyección de **R** sobre el plano **XY** forma con el semieje **X** positivo (**φ**), tal como se muestra en la figura 9.

Los ángulos θ y φ toman los nombres de ángulo polar y ángulo acimutal, respectivamente.

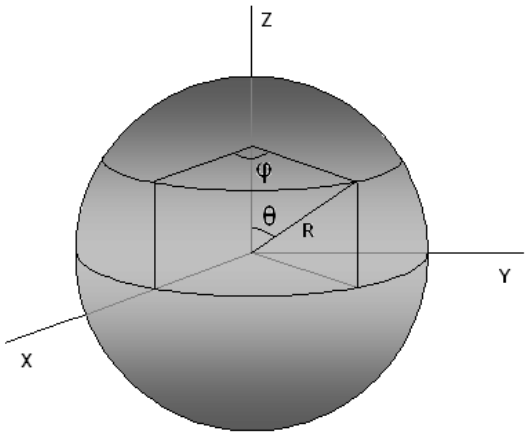


Figura 9. Sistema de Coordenadas Esféricas

La relación entre las coordenadas del Sistema Cartesiano y las del Sistema Esférico, se obtiene por medio de proyecciones del vector R sobre los ejes coordenados, usando para dicha proyección los ángulos polar y acimutal como se muestra en la ecuación 8.

$$x = R\ Sen\theta\ Cos\varphi$$
$$y = R\ Sen\theta\ Sen\varphi$$
$$z = R\ Cos\theta$$

Ecuación 8. Transformación de Coordenadas Esféricas a Cartesianas

Ejemplo 15. Transformación de Coordenadas Esféricas a Cartesianas.

Un punto sobre una esfera de radio 5m, se encuentra localizado en los ángulos $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

Encuentre las Coordenadas Cartesianas correspondientes al punto.

Solución:

$$x = 5 \times Sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \times Cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 5 \times 0.866 \times (-0.707) = -3.06$$

$$y = 5 \times Sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \times Sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 5 \times 0.866 \times 0.707 = 3.06$$

$$z = 5 \times Cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.5$$

Por despeje directo en la ecuación 8 se obtienen las transformaciones del Sistema Cartesiano al Sistema Esférico, como se muestra en la ecuación 9.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ecuación 9. Transformación de Coordenadas Cartesianas a Esféricas

Ejemplo 16. Transformación de Coordenadas Cartesianas a Esféricas

Dado un punto en Cartesianas (-5, 3, -4). Hallar las Coordenadas Esféricas que corresponden al punto dado.

Solución:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2 + (-4)^2} = 7.07$$

$$\varphi = Tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{3}{-5}\right) = 149^0$$

$$\theta = Tan^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{z}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{(-5)^2 + (3)^2}{-4}\right) = 124^0$$

En este sistema de coordenadas, al igual que en los anteriores, existen tres vectores directores que permiten indicar la dirección de un vector, se muestran en la figura 10.

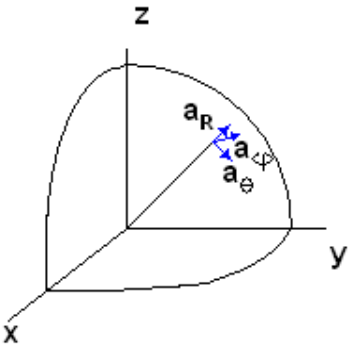


Figura 10. Vectores directores del Sistema de Coordenadas Esféricas

- El vector $\overrightarrow{a_R}$, que se dirige en la dirección de incremento de la distancia R.
- El vector $\overrightarrow{a_\varphi}$, que se dirige en la dirección de incremento del ángulo φ.
- El vector $\overrightarrow{a_\theta}$, que se dirige en la dirección de incremento del ángulo θ.

Un vector en Coordenadas Esféricas queda definido por:

$$\vec{A} = A_R \vec{a}_R + A_\varphi \vec{a}_\varphi + A_\theta \vec{a}_\theta$$

Donde A_R es la proyección radial del vector con respecto al origen de coordenadas, A_φ es la componente angular medida con respecto al semieje **x** positivo, proyectada sobre el plano **XY,** y A_θ es la proyección en dirección de incremento del ángulo**θ**.

El vector posición de cualquier punto en Coordenadas Esféricas queda definido por:

$$\vec{X} = R\vec{a}_R \quad ; \quad \varphi = \varphi_0 \quad ; \quad \theta = \theta_0$$

En el Sistema de Coordenadas Esféricas, la dirección de los tres vectores directores cambia de acuerdo con las coordenadas φ y θ, por lo que no se pueden asumir como constantes en operaciones de derivación, integración o transformación de coordenadas que las involucren.

Para realizar una transformación de un vector expresado en Coordenadas Esféricas y obtener sus componentes en Coordenadas Cartesianas se debe usar la matriz de transformación a Coordenadas Cartesianas que se muestra en la ecuación 10.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta Cos\varphi & -Sen\varphi & Cos\theta Cos\varphi \\ Sen\theta Sen\varphi & Cos\varphi & Cos\theta Sen\varphi \\ Cos\theta & 0 & -Sen\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\varphi \\ A_\theta \end{bmatrix}$$

Ecuación 10. Matriz de transformación de vectores de Coordenadas Esféricas a Cartesianas

Ejemplo 17. Transformación de vectores de Coordenadas Esféricas a Cartesianas.

Exprese los vectores $\vec{a}_\theta$ y $\vec{a}_R$ en Coordenadas Cartesianas y calcule sus componentes para los ángulos. $\varphi = \pi/4 \quad \theta = 2\pi/3$

Solución:

De la matriz de transformación se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta Cos\varphi & -Sen\varphi & Cos\theta Cos\varphi \\ Sen\theta Sen\varphi & Cos\varphi & Cos\theta Sen\varphi \\ Cos\theta & 0 & -Sen\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta Cos\varphi \\ Sen\theta Sen\varphi \\ Cos\theta \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\vec{a}_R = Sen\theta Cos\varphi \vec{a}_x + Sen\theta Sen\varphi \vec{a}_y + Cos\theta \vec{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta Cos\varphi & -Sen\varphi & Cos\theta Cos\varphi \\ Sen\theta Sen\varphi & Cos\varphi & Cos\theta Sen\varphi \\ Cos\theta & 0 & -Sen\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\theta Cos\varphi \\ Cos\theta Sen\varphi \\ -Sen\theta \end{bmatrix}$$

Multiplicando se obtiene:

$$\vec{a}_\theta = Cos\theta Cos\varphi \vec{a}_x + Cos\theta Sen\varphi \vec{a}_y - Sen\theta \vec{a}_z$$

Evaluando en los puntos dados:

$$\vec{a}_R = Sen\left(2\pi/3\right)Cos\left(\pi/4\right)\vec{a}_x + Sen\left(2\pi/3\right)Sen\left(\pi/4\right)\vec{a}_y + Cos\left(2\pi/3\right)\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_R = 0.61\vec{a}_x + 0.61\vec{a}_y - 0.50\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\theta = Cos\left(2\pi/3\right)Cos\left(\pi/4\right)\vec{a}_x + Cos\left(2\pi/3\right)Sen\left(\pi/4\right)\vec{a}_y - Sen\left(2\pi/3\right)\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\theta = -0.35\vec{a}_x - 0.35\vec{a}_y - 0.87\vec{a}_z$$

En la ecuación 11, se muestra la matriz de transformación inversa.

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\varphi \\ A_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta Cos\varphi & Sen\theta Sen\varphi & Cos\theta \\ -Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ Cos\theta Cos\varphi & Cos\theta Sen\varphi & -Sen\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Ecuación 11. Matriz de transformación de vectores de Coordenadas Cartesianas a Esféricas

Ejemplo 18. Transformación de vectores de Coordenadas Cartesianas a Esféricas.

Exprese el vector de fuerza $F = y\overrightarrow{a_x} - x\overrightarrow{a_y}$ en Coordenadas Esféricas.

Solución:

De la matriz de transformación se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\varphi \\ A_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta Cos\varphi & Sen\theta Sen\varphi & Cos\theta \\ -Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ Cos\theta Cos\varphi & Cos\theta Sen\varphi & -Sen\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = R\ Sen\theta\ Cos\varphi$$
$$y = R\ Sen\theta\ Sen\varphi$$

$$A_R = RSen^2\theta Sen\varphi Cos\varphi - RSen^2\theta Sen\varphi Cos\varphi = 0$$

$$A_\varphi = -RSen^2\varphi Sen\theta - RCos^2\varphi Sen\theta = -RSen\theta$$

$$A_\theta = RCos\theta Sen\varphi Cos\varphi - RCos\theta Sen\varphi Cos\varphi = 0$$

$$F = -RSen\theta\ \overrightarrow{a_\varphi}$$

Mediante la combinación de las ecuaciones de transformación entre Coordenadas Cartesianas y cada uno de los sistemas de coordenadas Curvilíneas se pueden obtener ecuaciones de transformación directas entre Coordenadas Cilíndricas y Esféricas.

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right) \quad \varphi = \varphi$$

Ecuación 12. Transformación de Coordenadas Cilíndricas a Esféricas

Ejemplo 19. Transformación de Coordenadas Cilíndricas a Esféricas.

Dado un punto localizado en $r = 3 \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad z = -4$, encuentre las Coordenadas Esféricas del punto.

Solución:

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\theta = Tan^{-1}\left(\frac{3}{-4}\right) = 143^0$$

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

Como también se puede obtener una ecuación de transformación directa entre Coordenadas Esféricas y Cilíndricas.

$$r = R\,Sen\theta \qquad z = R\,Cos\theta \qquad \varphi = \varphi$$

Ecuación 13. Transformación de Coordenadas Esféricas a Cilíndricas

Ejemplo 20. Transformación de Coordenadas Esféricas a Cilíndricas.

Un punto localizado sobre una esfera de radio 2m, se encuentra localizado en los ángulos $\theta = \frac{2\pi}{3}$ y $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Encuentre las Coordenadas Cilíndricas correspondientes al punto.

Solución:

$$r = 2 \times Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1.73$$

$$z = 2 \times Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

De igual forma, para transformar vectores de un Sistema de Coordenadas Esféricas a Cilíndricas, se usa la matriz de transformación de la ecuación 14.

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_z \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ Cos\theta & -Sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

Ecuación 14. Matriz de transformación de vectores de Coordenadas Esféricas a Cilíndricas

Ejemplo 21. Transformación de vectores de Coordenadas Esféricas a Cilíndricas.

Transforme el vector $V = 4\overrightarrow{a_R} - 3\overrightarrow{a_\theta}$ localizado en R=2, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ y $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a Coordenadas Cilíndricas.

Solución:

Se usa la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_z \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ Cos\theta & -Sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_r = 4Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 3Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4.96$$

$$A_\varphi = 0$$

$$A_z = 4Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 3Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.60$$

$$r = 2 \times Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1.73$$

$$z = 2 \times Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$V = 4.96\,\overrightarrow{a_r} + 0.60\,\overrightarrow{a_z}$$

Localizado en: r=1.73, z=-1, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Finalmente, para transformar vectores de Coordenadas Cilíndricas a Esféricas se aplica la matriz de transformación de la ecuación 15, lo cual completa la totalidad de las transformaciones posibles entre los tres sistemas.

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ Cos\theta & -Sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_z \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

Ecuación 15. Matriz de transformación de vectores de Coordenadas Cilíndricas a Esféricas

Ejemplo 22. Transformación de vectores de Coordenadas Cilíndricas a Esféricas.

Transforme el vector $V = \frac{4}{r}\overrightarrow{a_r} - 3\overrightarrow{a_\varphi}$ localizado en r=1, z=-1 y $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a Coordenadas Cilíndricas

Solución:

Se usa la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ Cos\theta & -Sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{r} \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Reemplazando: $r = R\,Sen\theta$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ Cos\theta & -Sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{R\,Sen\theta} \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A_R = \frac{4}{R} \qquad A_\theta = \frac{4}{R}Cotg\theta \qquad A_\varphi = -3$$

Dado que: $R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\theta = Tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = 135^0 \qquad \boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

$$A_R = 2\sqrt{2} \quad A_\theta = -2\sqrt{2} \qquad A_\varphi = -3$$

El Diferencial de Longitud

El Diferencial de Longitud expresa la distancia diferencial entre puntos localizados dentro de la misma vecindad.

El Diferencial de Longitud permite obtener, por integración directa y a través de las ecuaciones paramétricas de una trayectoria, la distancia entre puntos que no se encuentren dentro de la misma vecindad.

Diferencial de Longitud en Coordenadas Cartesianas

En Coordenadas Cartesianas, la obtención de un Diferencial de Longitud es sencilla, usando desplazamientos diferenciales en cada una de las direcciones de los ejes coordenados.

Vectorial $\vec{dl} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$

Escalar $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Ejemplo 23. Cálculo de la longitud de arco entre dos puntos.

Calcule la longitud de arco de la parábola $y = 3x^2 - 2x$ entre los puntos $x = 0 \quad x = 2$

Solución:

En un sistema de Coordenadas Cartesiana en 2D el diferencial escalar de longitud viene dado por:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Cuando se parametriza en función de la variable x queda:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Despejando de la ecuación de la trayectoria:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 2x\right) = 6x - 2$$

La longitud de arco sobre la parábola dada es por tanto:

$$\int_{x_1}^{x_2} dl = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + (6x-2)^2}\, dx = 9.12$$

Diferencial de Longitud en Coordenadas Cilíndricas

En este sistema de coordenadas es un poco más difícil, debido a la existencia de una coordenada angular, por lo que se hace necesario introducir un *coeficiente métrico* que convierte un desplazamiento angular diferencial en un Diferencial de Longitud de arco.

Dado que la longitud de arco subtendida por un ángulo φ expresado en radianes es equivalente al diferencial de dicho ángulo multiplicado por el radio del arco, el Diferencial de Longitud queda:

Vectorial $\vec{dl} = dr\,\vec{a}_r + rd\varphi\,\vec{a}_\varphi + dz\,\vec{a}_z$

Escalar $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$

Ejemplo 24. Integral de línea en Coordenadas Cilíndricas.

Dada una fuerza de ecuación $F = x\vec{a}_x - y\vec{a}_y$ calcular el trabajo realizado por dicha fuerza cuando se realiza un desplazamiento sobre la curva: $r = 1 \quad z = 4\varphi$ $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

Solución:

El trabajo realizado por la fuerza a través de la trayectoria dada se calcula como:

$$\Delta W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

Expresa la fuerza dada en Coordenadas Cilíndricas:

$$F = \begin{bmatrix} F_r \\ F_\varphi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi & Sen\varphi & 0 \\ -Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} F_r \\ F_\varphi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi & Sen\varphi & 0 \\ -Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \left(rCos^2\varphi - rSen^2\phi\right)\vec{a}_r - \left(2rCos\varphi\, Sen\varphi\right)\vec{a}_\varphi$$

Usando identidades trigonométricas:

$$F = rCos(2\varphi)\vec{a}_r - rSen(2\varphi)\vec{a}_\varphi$$

Para este caso el diferencial vectorial de longitud queda: $\vec{dl} = rd\varphi\,\vec{a}_\varphi + dz\,\vec{a}_Z$

Como los límites se encuentran expresados en φ, se parametriza con esta variable:

$$\vec{dl} = \left(r\,\vec{a}_{\varphi} + \frac{dz}{d\varphi}\vec{a}_{Z} \right) d\varphi$$

Reemplazando las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$r = 1 \quad z = 4\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{d\varphi} = 4$$

$$\vec{dl} = \left(1\vec{a}_{\varphi} + 4\vec{a}_{Z} \right) d\varphi$$

Reemplazando en el producto punto:

$$\vec{F}\cdot\vec{dl} = \left(rCos(2\varphi)\vec{a}_{r} - rSen(2\varphi)\vec{a}_{\varphi} \right)\cdot\left(\vec{a}_{\varphi} + 4\vec{a}_{Z} \right) d\varphi = -rSen(2\varphi)d\varphi$$

Reemplazando

$$\Delta W = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-Sen(2\varphi) \right) d\varphi = 0$$

Diferencial de Longitud en Coordenadas Esféricas

En este sistema se hace necesaria la introducción de dos coeficientes métricos que permiten convertir los desplazamientos angulares diferenciales en desplazamientos métricos.

Para el ángulo θ, expresado en radianes, se usa el radio R para el cálculo de la longitud de arco generada por el desplazamiento angular diferencial. Para el ángulo φ en cambio se usa el mismo radio r usado en las coordenadas cilíndricas, el cual al ser transformado al Sistema de Coordenadas Esféricas se expresa como: $r = RSen\theta$

El Diferencial de Longitud en el Sistema de Coordenadas Esféricas queda expresado como:

Vectorial $\vec{dl} = dR\,\vec{a}_{R} + RSen\theta\, d\varphi\,\vec{a}_{\varphi} + Rd\theta\,\vec{a}_{\theta}$

Escalar $dl^2 = dR^2 + \left(R\,Sen\theta \right)^2 d\varphi^2 + R^2 d\theta^2$

El operador gradiente

El operador gradiente permite cuantificar la variación total que experimenta una función de varias variables en términos de la variación en cada una de ellas.

Desde el punto de vista matemático, representa el conjunto de derivadas direccionales de una función de varias variables con respecto a las diferentes coordenadas de un sistema de referencia, representado a través de un operador vectorial dado que como resultado de la aplicación del operador resulta un vector que apunta en la dirección de máxima variación de la función dada.

El diferencial total de cualquier función $F(x, y, z)$ expresada en Coordenadas Cartesianas viene definido por:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \nabla F \cdot \vec{dl}$$

Donde:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{a}_z$$

$$\vec{dl} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$$

El diferencial de cualquier función se puede calcular en términos del producto escalar como:

$$\Delta F = \nabla F \cdot \vec{dl} = |\nabla F||dl|Cos\theta$$

Ecuación 16. Diferencial total de una función escalar en función del Operador Gradiente

En la ecuación 16 y con base en las propiedades del producto escalar, se puede apreciar que el diferencial total de una función es cero siempre que el desplazamiento sea perpendicular al vector gradiente.

Esto implica que para cualquier función de varias variables es posible siempre encontrar un lugar geométrico de puntos entre los cuales no existe diferencial total de la función.

Este lugar geométrico puede estar formado por trayectorias o superficies, dependiendo del número de variables involucradas, en las cuales la función considerada no presenta ningún tipo de variación.

Igualmente, el diferencial total es máximo cuando el desplazamiento ocurre en dirección del vector gradiente, por lo que se dice que éste apunta siempre en la dirección de máxima variación de la función.

Cuando se utilizan coordenadas angulares, es necesario multiplicar los diferenciales de dichas coordenadas por los factores métricos con lo que la expresión para el gradiente en los sistemas de Coordenadas Curvilíneas queda:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r}\overrightarrow{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\overrightarrow{a_\varphi} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{a_z}$$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial R}\overrightarrow{a_r} + \frac{1}{R\,Sen\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\overrightarrow{a_\varphi} + \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial \theta}\overrightarrow{a_\theta}$$

Ecuación 17. Operador gradiente en Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

Ejercicios del capítulo

1. Dados 3 puntos en Coordenadas Cartesianas: A (1, -2, 3), B (-2, 1, -1) y C (-3, 2, -2), determine el ángulo con vértice en B que forman las rectas AB y CB.

2. Dado un punto en Coordenadas Cartesianas $(3, -2, -1)$, encuentre las Coordenadas Cilíndricas y las Coordenadas Esféricas correspondientes al punto.

3. Dado un punto en Coordenadas Cilíndricas $r = 5$ $\varphi = 217^0$ $z = -4$, encuentre las Coordenadas Cartesianas y las Coordenadas Esféricas correspondientes al punto.

4. Dado un punto en Coordenadas Esféricas $R = 5$ $\varphi = 320^0$ $\theta = 127^0$, encuentre las Coordenadas Cartesianas y las Coordenadas Cilíndricas correspondientes al punto.

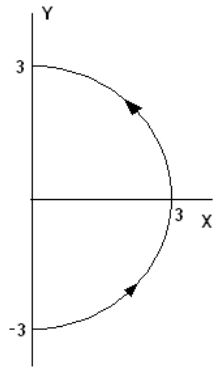
5. Dado un vector posición en Coordenadas Esféricas $R = 5$ $\theta = \frac{\pi}{6}$ $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, encuentre un vector unitario en la misma dirección de R en Coordenadas Cartesianas

6. Dados dos vectores en Coordenadas Cilíndricas A y B tal que: $A = 2r\overrightarrow{a_r} + 6rCos\varphi\overrightarrow{a_\varphi} + 3\overrightarrow{a_z}$ y $B = r^2\overrightarrow{a_r} - 4\overrightarrow{a_z}$. Encuentre un vector unitario perpendicular a ambos en el punto C (1, 2, -1).

7. Una fuerza se encuentra definida por la ecuación $\vec{F} = y\overrightarrow{a_x} + x\overrightarrow{a_y} + y\overrightarrow{a_z}$. Calcule el trabajo W realizado por dicha fuerza al desplazarse a través de la curva $4r^2 - z = 0$ ubicada sobre el plano $\varphi = \frac{\pi}{2}$ entre los puntos $z = [0,1]$.

8. Calcule el trabajo realizado al desplazarse en un campo de fuerza cuya ecuación está definida por: $\vec{F} = x\overrightarrow{a_x} + y\overrightarrow{a_y} - x\overrightarrow{a_z}$ sobre una trayectoria definida por: $x^2 + 2y - 1 = 0$; $z = x + 2$ entre los puntos: $x = [0,1]$.

9. Dada una fuerza $F = (z + xy^2)\overrightarrow{a_x} + (z - x^2y)\overrightarrow{a_y} + (2y + x^2)\overrightarrow{a_z}$. Calcule el trabajo **W** necesario para llevar una partícula a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$ entre los puntos (0,-3) y (0,3), como se muestra en la figura.



10. Hallar la longitud de arco de la curva $y = Ln(1 - x^2)$ en el intervalo $x = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

11. Dada una hélice generada por un cardiode de ecuación: r = 1 − Cosφ dado que z = $\frac{\text{Sen}\varphi}{\sqrt{2}}$ Calcule la longitud de arco de la hélice en los límites $0 < \varphi < \pi$.

12. Encuentre un vector unitario que apunte en la dirección de máxima variación de la función: $F = x^2z + 2y^2 - z$ en el punto $P(-1,1,-2)$. Encuentre el ángulo que dicho vector forma con el semieje positivo de las Z.

13. En un cuarto cerrado con dimensiones $0 < (x, y) < 6$, la temperatura sobre el piso viene expresada por una función: $T(x, y) = T_0 - (x - 3)^2 - 2(y - 3)^2$

Si una hormiga camina sobre el suelo del cuarto, obtenga las ecuaciones de las trayectorias sobre las que debe caminar la hormiga para someterse a la mínima variación de temperatura.

Obtenga la ecuación de las posibles trayectorias que debe seguir la hormiga si la ponen en el centro del cuarto para llegar más rápido a los puntos del cuarto con menor temperatura.

14. Dadas dos funciones vectoriales A y B tal que: $A = y\overrightarrow{a_x} + x\overrightarrow{a_y}$ y $B = r^2\overrightarrow{a_r} - 10\overrightarrow{a_z}$. Encuentre la proyección vectorial del vector A sobre el vector B en el punto $C\left(r = \sqrt{10}, \varphi = 30^0, z = -1\right)$. Encuentre el vector AxB y el vector A-B. Demuestre que son mutuamente perpendiculares.

15. La altura de una colina artificial se encuentra definida por la ecuación:

$$z = \frac{200}{x^2 + 3x^2y^2 + 2y^2 + 1}$$

Si se pone una pelota en la cima de la colina, encuentre una familia de curvas que describa las posibles trayectorias de la pelota en su camino rodando por la pendiente de la colina, sabiendo que la pelota rueda siempre hacia los caminos que presentan mayor inclinación.

Suponga que la pelota no rebota.

Respuestas de los ejercicios

1. 172º
2. $r = 3.6 \;\; \varphi = 326^0 \;\; z = -1 \qquad R = 3.7 \;\; \varphi = 326^0 \;\; \theta = 106^0$
3. $x = 4 \;\; y = -3 \;\; z = -4 \qquad R = 6.4 \;\; \varphi = 217 \;\; \theta = 129^0$
4. $x = 3.1 \;\; y = -2.6 \;\; z = -3 \qquad r = 4 \;\; \varphi = 320^0 \;\; z = -3$
5. $u = -\frac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{a_x} + \frac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{a_y} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{a_z}$
6. $u = 0.80\overrightarrow{a_x} + 0.13\overrightarrow{a_y} + 0.60\overrightarrow{a_z}$
7. $W = \frac{1}{3}$
8. $W = \frac{1}{4}$
9. $W = 0$
10. L=0.572
11. $\pi\sqrt{2}$
12. $u = 0.70\overrightarrow{a_x} + 0.70\overrightarrow{a_y} - 0.17\overrightarrow{a_z}$ Ángulo: 100º
13. Máxima variación de temperatura: $y = a(x-3)^2 + 3$
Mínima variación de temperatura: $(x-3)^2 + 2(y-3)^2 = a$
14. $\overrightarrow{Proy_B}A = 16.8\overrightarrow{a_x} + 9.7\overrightarrow{a_y} - 19.4\overrightarrow{a_z} \qquad A \times B = 27.4\,\overrightarrow{a_x} + 15.8\,\overrightarrow{a_y} - 15.8\,\overrightarrow{a_z}$
$A - B = -7.1\,\overrightarrow{a_x} - \; 2.3\,\overrightarrow{a_y} + 10\,\overrightarrow{a_z}$
15. $Ln\left|\frac{y^2}{x}\right| + 3(y^2 - x^2) = k$

Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios, se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para operaciones vectoriales básicas y operador gradiente:

Cheng, David K. Fundamentos de eletromagnetismo para ingeniería. Primera edición. Argentina: Addison Wesley Iberoamericana, 1997. Páginas 13-38. ISBN 0-201-65375-3.

Reitz, John D., Milford, Frederick J., Christy, Robert W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Cuarta edición. México: Addison Wesley, 1996. Páginas 1-11. ISBN 968-444-403-6.

Para sistemas de coordenadas, diferenciales de longitud:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 1-53. ISBN 968-880-954-3.

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 1 -21. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para gradiente y propiedades del gradiente:

Cheng, David K. Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería. Primera edición. Argentina: Addison Wesley Iberoamericana, 1997. Páginas 39-42. ISBN 0-201-65375-3.

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 57-66. ISBN 968-880-954-3.

Capítulo 2

Introducción a la Teoría de Campos

Introducción

El modelo de campos eléctricos y magnéticos es un derivado formal de la Teoría de los Efluvios de William Gilbert, quien sostenía que las propiedades electromagnéticas de los cuerpos eran fruto de emanaciones que les rodeaban,[1] y afectaban el comportamiento de otros cuerpos que tenían las mismas propiedades.

La primera aplicación del concepto moderno de campo a la Física aparece en el siglo IXX, cuando Michael Faraday lo utiliza para explicar las fuerzas de naturaleza electromagnética. Faraday descubrió la existencia de las Líneas de Fuerza de los imanes permanentes y de las cargas eléctricas y midió su intensidad y dirección en diferentes puntos de su laboratorio, les asignó valores y definió su ruta. A la colección de esos puntos que describen una fuerza, los llamó campo.

Hoy en día, toda la formulación matemática de las leyes de la Física se hace en términos de teorías de campo y en el presente capítulo se estudian fundamentalmente dos tipos de campos; el Campo Escalar y el Campo Vectorial.

Definición de campo

Un campo se define como una función que representa la distribución espacial de una magnitud física.

En general se observa que las magnitudes físicas varían en función de las coordenadas en las que se efectúe la medición de la misma. Por ejemplo, si se quiere medir la velocidad con la que corre el agua de un río, el resultado no es el mismo si se mide en presencia de un remolino o de un remanso.

Cuando la magnitud medida es de naturaleza escalar (temperatura, densidad, masa, turbiedad), el campo se llama Campo Escalar; mientras que si la magnitud es de naturaleza vectorial (fuerza, velocidad, aceleración), se denomina Campo Vectorial.

Algunos campos son considerados estáticos, cuando su valor no cambia sensiblemente en la escala de tiempo observada; mientras aquellos que varían en una escala de tiempo definida se denominan dinámicos.

[1] William Gilbert (1544-1603). Epístola de Magnete. Inglaterra.

Más recientemente se habla de una clasificación intermedia, referida a campos que tienen una variación "lenta", en un rango de tiempo definido, a estos campos se les llama cuasi-estáticos y reciben un tratamiento matemático especial.

Campo Escalar

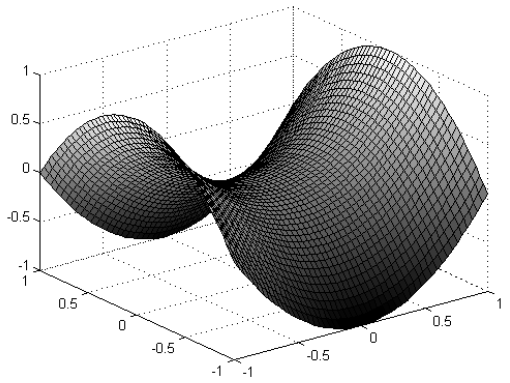
El concepto de Campo Escalar data del siglo XIX y su aplicación está orientada a la descripción de fenómenos relacionados con la distribución de temperaturas dentro de un cuerpo, las presiones en el interior de fluidos, el potencial electrostático, la energía potencial en un sistema gravitacional, las densidades de población o de cualquier magnitud cuya naturaleza pueda aproximarse a una distribución continua.

Modelo matemático

Un Campo Escalar representa la distribución espacial de una magnitud escalar y por lo tanto se representa como una función en la cual las coordenadas actúan como variables independientes.

$$\Phi = f\left(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n\right)$$

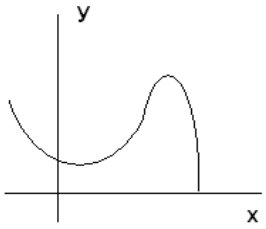
La representación de un Campo Escalar se hace tomando un eje coordenado por cada variable independiente y un eje adicional para la variable representada. En la figura 11 se ve la representación espacial de un campo cuyo valor depende de dos coordenadas.



$$z = f\left(x, y\right) = x^2 - y^2$$

Figura 11. Campo Escalar en R^2

Cuando el valor del campo depende de una sola coordenada la representación se reduce a una curva, tal como se muestra en la figura 12.



$$y = f(x)$$

Figura 12. Campo Escalar en R^1

Las representaciones de estos campos, cuando la variación ocurre en función de las tres coordenadas, requiere de cuatro ejes diferentes, por lo que graficarlas resulta imposible en tres dimensiones; para estos casos se usan representaciones alternativas como las superficies o las curvas denominadas equipotenciales.

Superficies y curvas equipotenciales

Una superficie o línea equipotencial se define como el lugar geométrico de los puntos tales que la magnitud de la cantidad física representada permanece constante:

$$\Phi = Cte.$$

En un mapa de relieve, por ejemplo, se tiene un Campo Escalar correspondiente a elevación sobre el nivel del mar como función de las coordenadas latitud y longitud geográficas.

En este tipo de mapas, las líneas equipotenciales se denominan curvas de nivel, y todos los puntos pertenecientes a una curva de nivel tienen la misma elevación sobre el nivel del mar, como se muestra en la figura 13. A partir de las curvas de nivel, los topógrafos pueden formarse una idea general de cómo es el relieve en una determinada zona de la geografía de un país.

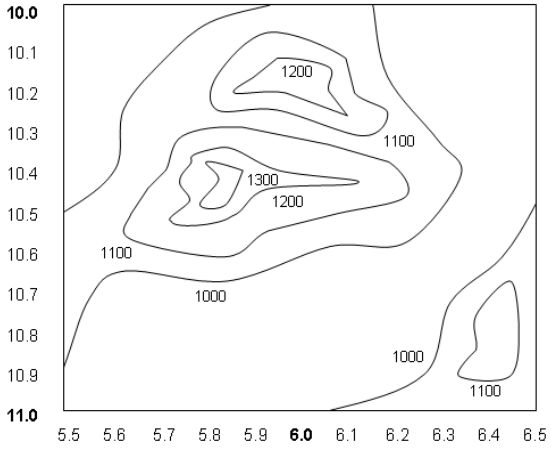


Figura 13. Curvas de nivel de un Campo Escalar definido en R^2

En los mapas de temperatura, las líneas o superficies que unen los puntos de igual temperatura se llaman isotermas; mientras en la Electrostática, las líneas o superficies que unen los puntos de igual potencial electrostático se denominan líneas o superficies equipotenciales.

En cada campo de la Ingeniería se tiene un nombre diferente para este tipo de curvas o superficies, pero la esencia matemática de la representación se mantiene.

La diferencia entre superficies y líneas equipotenciales radica en el número de variables independientes involucradas en la función. Si se representa el campo en función de dos variables, se forman líneas equipotenciales; en caso de que se usen tres variables independientes, entonces se habla de superficies equipotenciales.

Ejemplo 25. Trazado de líneas equipotenciales de un Campo Escalar.

Dado un Campo Escalar $z = 4x^2 - y^2$. Trace las líneas equipotenciales

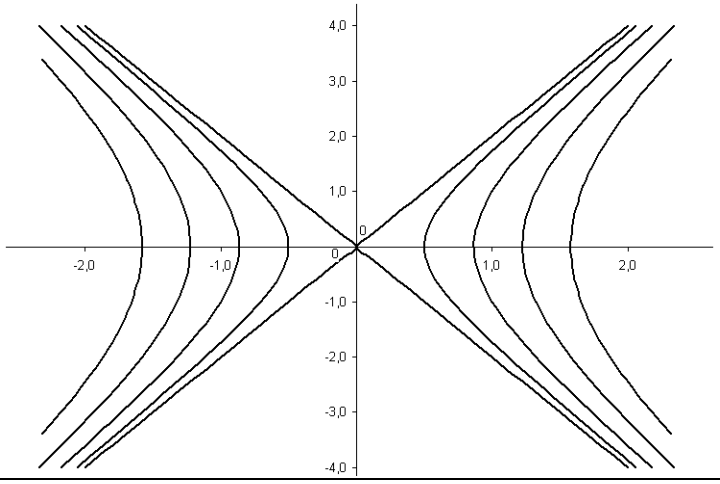
Solución:

Las líneas equipotenciales son todas aquellas de la forma $z = cte$. Esto da origen a una familia de curvas en el plano XY caracterizadas por las ecuaciones resultantes de despejar y en la ecuación del campo.

Para el caso que se considera, el resultado de despejar Y es:

$$y = \pm\sqrt{4x^2 - z}$$

Esto corresponde a una ecuación de una hipérbole siempre que $z > 0$, por lo que las líneas equipotenciales trazadas para diferentes valores de z se pueden graficar como sigue.



De acuerdo con la definición de superficie equipotencial, el diferencial total entre dos puntos de la misma vecindad de una superficie equipotencial es cero.

Esta propiedad, a la luz de las propiedades del gradiente expresadas en la ecuación 16 implica que el gradiente de un Campo Escalar apunta siempre en dirección perpendicular a las líneas o superficies equipotenciales, como se muestra en la figura 14.

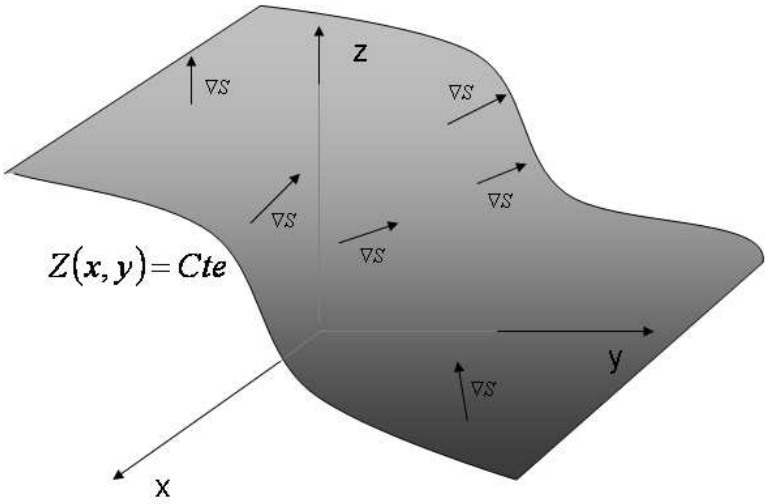


Figura 14. Representación del gradiente de un Campo Escalar y su relación con la superficie equipotencial

Campo Vectorial

Matemáticamente se define un Campo Vectorial como una función vectorial de las coordenadas o como un caso especial de una transformación no necesariamente lineal. $R^n \Rightarrow R^m$, en donde R^n representa el espacio vectorial que hace las veces de dominio y R^m el espacio vectorial que actúa como rango.

En el caso de un espacio tridimensional y un vector tridimensional, la transformación queda de la siguiente forma:

$$\vec{\Gamma} = \Gamma_x(x,y,z)\ \vec{a}_x + \Gamma_y(x,y,z)\ \vec{a}_y + \Gamma_z(x,y,z)\ \vec{a}_z$$

Cuando se modela la distribución de esfuerzos en una estructura, la distribución de fuerzas de naturaleza electromagnética o gravitatoria en el espacio, se hace usando campos vectoriales.

Otros ejemplos de campos vectoriales son las funciones de velocidad asociadas a las trayectorias de las partículas o diferenciales de volumen de una sustancia en condiciones de flujo bien sea laminar o turbulento.

El gradiente de un campo escalar, constituye un ejemplo adicional de Campo Vectorial, dado que la magnitud y dirección del gradiente de un campo escalar es una función de las coordenadas, tal como se ilustró en la figura 14.

Ejemplo 26. Formación de un Campo Vectorial a partir del gradiente de un Campo Escalar

Encuentre el Campo Vectorial formado por el gradiente del Campo Escalar:

$$z = 4x^2 - y^2$$

Solución:

El gradiente del Campo Escalar se calcula de acuerdo con la formulación del operador gradiente en Coordenadas Cartesianas, es decir:

$$\nabla Z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{a}_y$$

En este caso: $z = 4x^2 - y^2$

Por lo que el gradiente queda: $\nabla Z = 8x\vec{a}_x - 2y\vec{a}_y$

Como se aprecia, se genera un vector cuya dirección y magnitud dependen de las coordenadas, es decir, un Campo Vectorial.

Modelo matemático

La representación de los campos vectoriales se hace mediante mapas semejantes a los de los campos escalares, pero usando líneas que representan la continuidad de la orientación de los vectores de campo sobre una región definida. Estas líneas reciben el nombre de Líneas de Fuerza.

Al igual que con los campos escalares, un campo vectorial no puede representarse fácilmente en tres dimensiones, por lo que normalmente se hacen proyecciones sobre los planos directores del sistema de coordenadas.

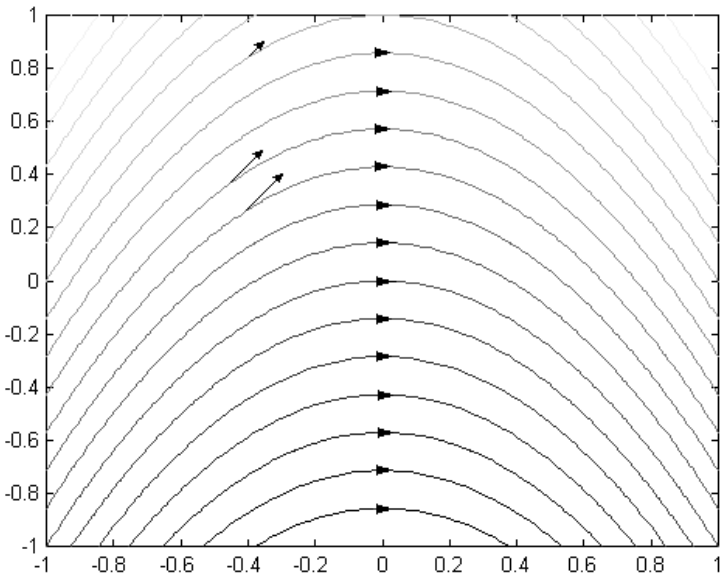


Figura 15. Representación de un Campo Vectorial de $R^2 \rightarrow R^2$

Las Líneas de Fuerza cumplen con las siguientes propiedades:

- Los vectores del campo son tangenciales a la línea de fuerza en cualquier punto.
- Las Líneas de Fuerza no se cruzan en ningún punto aunque pueden seguir trayectorias cerradas.[2]
- La cantidad de Líneas de Fuerza en cualquier porción del espacio en que se encuentra definido el campo es proporcional a la intensidad del campo vectorial.

En algunas otras ocasiones, la representación de campos vectoriales se hace a través de los vectores de campo directamente. En estos casos, la intensidad del campo vectorial se asocia a la densidad de vectores de campo en una región, tanto como a la longitud de los mismos.

Líneas de Fuerza

De acuerdo con la definición, una línea de fuerza es tangente a los vectores de campo en todos los puntos del espacio vectorial definido. Esto, se ilustra gráficamente en la figura 16.

[2] Esto supone una asignación doble al vector de campo en el mismo punto. Lo cual no es físicamente posible, ya que en este caso el vector de campo sería la suma vectorial de los vectores asignados al punto dado.

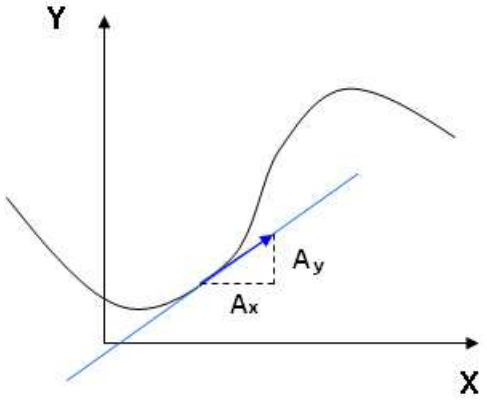


Figura 16. Relación entre los vectores de campo y la recta tangente a la curva en una línea de fuerza

Se observa claramente que el vector de campo tiene la misma dirección de la recta tangente a la línea de fuerza en el punto de tangencia.

En este caso, el vector de campo tiene dos componentes denominados A_x y A_y respectivamente; resulta entonces que la relación entre las componentes del vector da como resultado la pendiente de la recta tangente a la línea de fuerza en cada punto de tangencia.

Dado que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la curva, se puede entonces proponer una igualdad definida por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_y}{A_x}$$

La familia de soluciones a esta ecuación diferencial es entonces la misma familia de curvas que representa las Líneas de Fuerza.

Ejemplo 27. Trazado de las líneas de fuerza de un campo vectorial.

Trace las Líneas de Fuerza del Campo Vectorial dado por la ecuación:

$$A = 8x\,\vec{a}_x - 2y\,\vec{a}_y$$

Solución:

En este caso, la ecuación diferencial planteada quedaría:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_y}{A_x} = \frac{-2y}{8x} = -\frac{y}{4x}$$

La familia de soluciones de esta ecuación se obtiene por integración y separación de variables:

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{4x} dx = c$$

$$4Ln(y) + Ln(x) = 4c$$

$$Ln(xy^4) = 4c$$

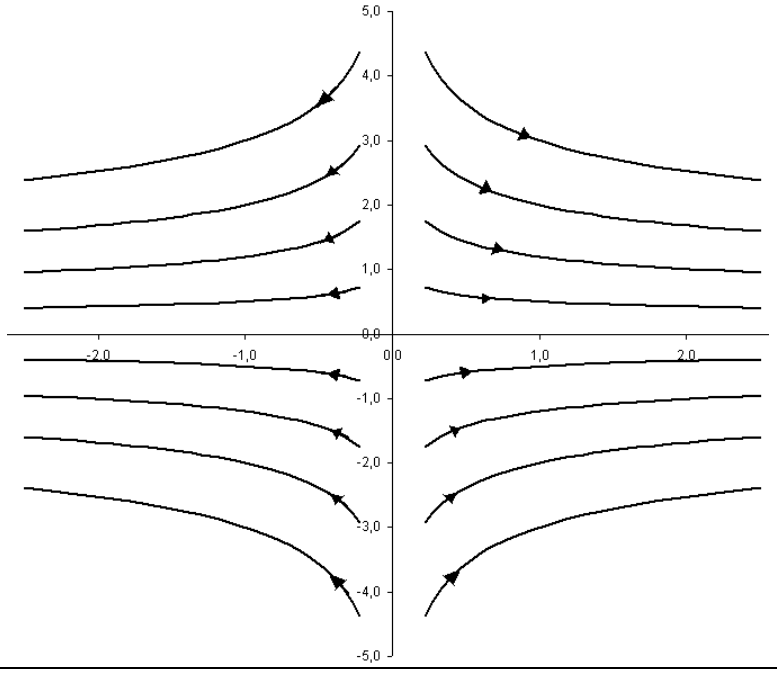
Por lo tanto:

$$y^4 = \frac{e^{4c}}{x}$$

Por lo que la solución general es de la forma:

$$y = \frac{k}{\sqrt[4]{x}}$$

Para diferentes valores de k, tanto negativos como positivos se obtienen diferentes Líneas de Fuerza según se ilustra en la figura.



Circulación y Rotacional

Cuando las Líneas de Fuerza en cualquier región del espacio donde se encuentre definido el campo siguen una trayectoria cerrada se dice que el campo posee circulación en dicha región.

La circulación es una característica de los campos vectoriales y tiene una definición matemática relativamente simple. La circulación de un campo es la sumatoria sobre una trayectoria cerrada de las componentes de campo tangenciales a la trayectoria.

$$Circulación = \oint_C \vec{\Gamma} \cdot \vec{dl}$$

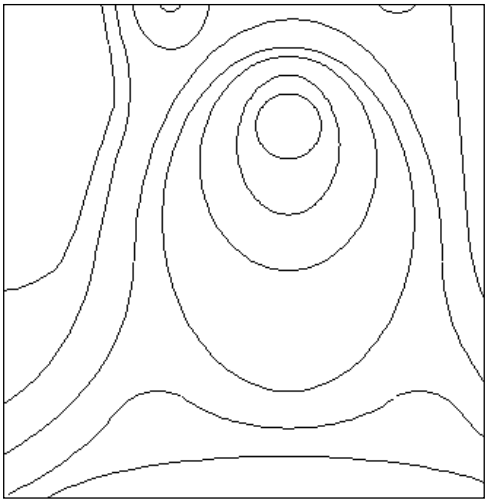


Figura 17. Líneas de Fuerza de un Campo Vectorial con circulación

Cuando se desea medir la circulación de un Campo Vectorial como una función de las coordenadas, se utiliza un operador vectorial denominado rotacional, que mide la circulación por unidad de área cuando el área tiende a cero en cada punto del espacio en que se encuentra definido el campo.

$$rot\,\vec{\Gamma} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{\Gamma} \cdot \vec{dl}$$

Donde **C** es la curva que encierra la superficie ΔS.

El rotacional de un campo es una función de las coordenadas y cuando el rotacional es nulo en todos los puntos de una determinada región, se dice que el campo es conservativo en dicha región.

En los diferentes sistemas de coordenadas, el operador rotacional se muestra en la ecuación 18.

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_x} & \overrightarrow{a_y} & \overrightarrow{a_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad \nabla \times A = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_r} & r\overrightarrow{a_\varphi} & \overrightarrow{a_z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{R^2 Sen\,\theta} \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_R} & RSen\,\theta\overrightarrow{a_\varphi} & R\overrightarrow{a_\theta} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ A_R & RSen\,\theta A_\varphi & RA_\theta \end{vmatrix}$$

Ecuación 18. Rotacional en coordenadas generalizadas

Campos conservativos y no conservativos

Cuando un campo presenta circulación en alguna región del espacio, en particular, cuando el campo representa algún tipo de fuerza, la integral de línea que define la circulación queda relacionada con una unidad de fuerza multiplicada por una unidad de longitud, lo cual es equivalente a una unidad de energía.

$$Circulación = \oint F(N) \cdot dl(m)$$

$$Newton \times metro = Joule$$

Este valor tiene significado físico en forma de trabajo y representa la cantidad de energía ganada al realizar un desplazamiento en trayectoria cerrada en la región en la que se encuentra definido el campo de fuerza.

De acuerdo con la ley de conservación de la energía, la energía ganada en el trayecto de ida debería ser compensada en el trayecto de retorno, por lo que la ganancia total de energía en una trayectoria cerrada debería ser igual a cero; sin embargo, esto no ocurre en todos los campos de fuerza como se podrá determinar más adelante.

Cuando un campo de fuerza cumple con la ley de conservación de la energía, debe tener circulación nula independientemente de la trayectoria escogida.

Los campos que cumplen con la ley de conservación de la energía se llaman “campos conservativos”, ya que la cantidad de energía de una partícula que los recorre en una trayectoria cerrada se conserva, es decir, permanece constante.

Aquellos campos que no cumplen con esta condición se denominan “campos no conservativos”.

Dado que la definición matemática de circulación depende de la trayectoria escogida, no resulta de gran utilidad para definir la naturaleza de un Campo Vectorial frente a la conservación de energía.

Una forma más útil de definir la naturaleza del campo frente a la conservación de energía proviene entonces del Rotacional, el cual, al ser de valor nulo, garantiza que las Líneas de Fuerza del campo no forman trayectorias cerradas en ninguna región del espacio y, por lo tanto, la circulación va a tener un valor nulo, independientemente de la trayectoria.

Teorema de Stokes

A partir de la definición de rotacional, se deduce una identidad conocida como el Teorema de Stokes:

Dado que el rotacional de un Campo Vectorial es una especie de derivada superficial de la circulación, es lógico pensar que la integral de área del rotacional corresponda a la circulación de campo, de donde se desprende la ecuación 19.

$$\int_S rot\vec{\Gamma}\cdot\vec{dS} = \oint_C \vec{\Gamma}\cdot\vec{dl} \quad ; \quad \vec{dS} = dS\,\vec{a}_n$$

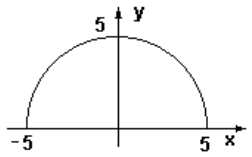
Ecuación 19. Teorema de Stokes

La circulación de un Campo Vectorial a lo largo de cualquier trayectoria es igual a la integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por dicha trayectoria.

Ejemplo 28. Aplicación del Teorema de Stokes.

Dado el Campo Vectorial $\vec{A} = y\,\vec{a}_x - x\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$

Demuestre que cumple el Teorema de Stokes para la superficie detallada en la figura, y que se encuentra ubicada sobre el plano $z = 1$. ¿El campo es conservativo?



Solución:

Se calcula el rotacional de acuerdo con la ecuación 18

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = -2\,\vec{a}_z$$

El rotacional es constante, por lo que al integrarlo sobre el área, el resultado es igual al área multiplicada por la magnitud del rotacional.

$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot dS = (-2)\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = -25\pi$$

Ahora se calcula la circulación sobre la curva que delimita a la superficie

La curva se divide en la parte circular y en la parte recta cuyos diferenciales son respectivamente:

Para la parte circular: $\vec{dl} = rd\varphi \vec{a}_\varphi$

El producto punto queda:

$$\vec{A} \cdot \vec{dl} = \left(y\vec{a}_x - x\vec{a}_y + z\vec{a}_z\right) \cdot \left(rd\varphi \vec{a}_\varphi\right) = ryd\varphi \vec{a}_x \cdot \vec{a}_\varphi - rxd\varphi \vec{a}_y \cdot \vec{a}_\varphi$$

Los productos punto entre vectores directores se sacan de la ecuación 6.

$$\vec{A} \cdot \vec{dl} = r^2 Sen\varphi d\varphi(-Sen\varphi) - r^2 Cos\varphi d\varphi(Cos\varphi) = -r^2 d\varphi$$

Para la parte recta se tiene: $\vec{dl} = dx\vec{a}_x$

El producto punto queda:

$$\vec{A} \cdot \vec{dl} = \left(y\vec{a}_x - x\vec{a}_y + z\vec{a}_z\right) \cdot \left(dx\vec{a}_x\right)\Big|_{y=0} = ydx\Big|_{y=0} = 0$$ [3]

La integral completa queda:

$$\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_0^\pi \vec{A} \cdot \vec{dl} + \int_{-5}^5 \vec{A} \cdot \vec{dl} = -25\pi$$

Dado que el rotacional del campo es no nulo, existe al menos una trayectoria sobre la cual la integral cerrada es diferente de cero, por lo tanto el campo no es conservativo.

[3] Sobre el eje x se cumple que la coordenada y es cero.

Flujo y divergencia

El flujo de un Campo Vectorial **A** se define como la cantidad de Líneas de Fuerza que atraviesa la superficie y es una cantidad escalar. Para cuantificarlo, se toma solamente la componente normal de las líneas que inciden sobre la superficie, ya que la componente tangencial de las mismas, no atraviesa la superficie, por lo que no contribuye al flujo.

La componente normal se obtiene así como la proyección del vector de campo sobre un vector unitario perpendicular a la superficie.

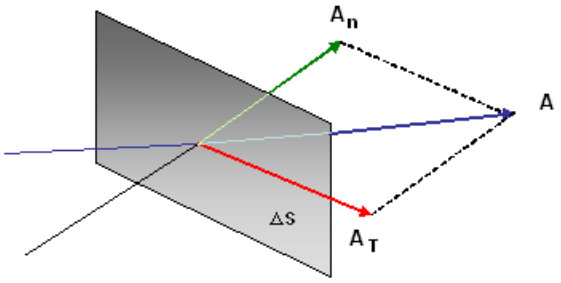


Figura 18. Flujo de un Campo Vectorial **A** a través de una superficie **ΔS**

$$flujo = \int_S \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

Cuando la superficie utilizada para el cálculo de flujo es cerrada, se define como flujo neto de salida, el cual atraviesa la superficie cuando el vector de superficie apunta siempre hacia el exterior de la misma.[4]

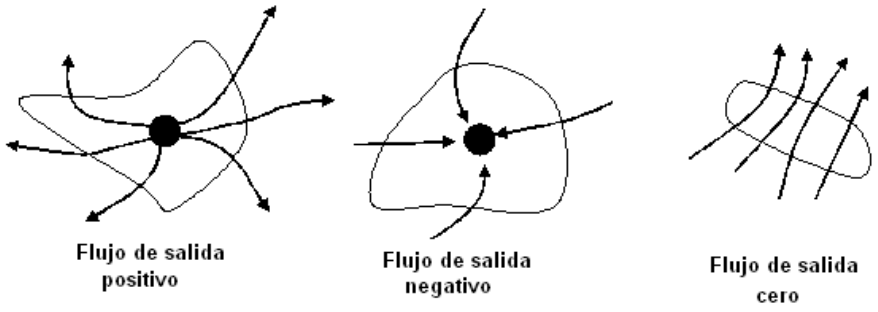


Figura 19. Flujo de salida de una superficie cerrada en presencia de una fuente, un sumidero o ninguno de ellos

Cuando el flujo de salida es positivo, significa que en el interior de la superficie se encuentra una "fuente" de campo, es decir, dentro de la superficie se encuentra algún punto en el que se originan Líneas de Fuerza que después abandonan la superficie.

[4] El nombre en inglés para flujo de salida es Outflow u Otward flow.

Cuando el flujo de salida tiene signo negativo significa que en el interior de la superficie se encuentra un "sumidero", es decir, el caso contrario a una fuente; en general, las Líneas de Fuerza nacen en las fuentes y terminan en los sumideros.

El flujo de salida por unidad de volumen encerrado puede tomarse como una medida de la presencia de fuentes o sumideros en la región delimitada por la superficie y se hacen evidentes a través de un operador vectorial denominado divergencia.

La divergencia de un Campo Vectorial corresponde al flujo de salida por unidad de volumen, cuando esta se hace infinitesimal y representa por lo tanto una función de las coordenadas.

La divergencia de un Campo Vectorial es un Campo Escalar dada la naturaleza escalar del flujo y la naturaleza puntual de la divergencia.

$$div\,\vec{\Gamma} = \underset{\Delta v \to 0}{Lim} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \vec{\Gamma} \cdot \vec{dS}$$

El operador divergencia en cada uno de los sistemas de coordenadas tratados en este libro es:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \qquad \nabla \cdot F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 F_R\right) + \frac{1}{RSen\,\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{RSen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\theta Sen\,\theta\right)$$

Ecuación 20. Divergencia en diferentes sistemas de coordenadas

Ejemplo 29. Cálculo de divergencia

Defina las regiones en las cuales el Campo Vectorial del ejemplo 28 presenta fuentes o sumideros.

Solución:

El campo $\vec{A} = y\,\vec{a}_x - x\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$ se encuentra definido en cartesianas, por lo tanto la divergencia del campo queda definida por:

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 1$$

Como la divergencia es positiva e independiente de las coordenadas, se concluye que todos los puntos del espacio son fuentes de campo y que no existen sumideros.

Teorema de la Divergencia

De la definición de Divergencia se desprende una identidad conocida como el Teorema de la Divergencia:

Dado que la Divergencia de un Campo Vectorial es una especie de derivada volumétrica del flujo de salida del campo, es lógico pensar que la integral de volumen de la divergencia, corresponda al flujo total de salida del campo de donde se desprende la ecuación 21.

$$\int_v div\,\vec{\Gamma}\cdot dv = \oint_S \vec{\Gamma}\cdot \vec{dS} \quad ; \quad \vec{dS} = dS\,\vec{a}_n$$

Ecuación 21. Teorema de la Divergencia

El flujo de salida de un Campo Vectorial a través de cualquier superficie cerrada es igual a la integral de volumen de la divergencia del campo sobre el volumen encerrado por la superficie. Cuando se desea calcular el flujo de salida de un campo a través de una determinada superficie cerrada, se hace evidente la simplicidad introducida mediante el Teorema de la Divergencia:

Ejemplo 30. Teorema de la Divergencia

Calcule el flujo de salida del Campo Vectorial del ejemplo 28 a través de la esfera $R = 1.$

Solución:

Cuando se hace uso del Teorema de la Divergencia, el cálculo se hace muy simple. La divergencia del campo $\vec{A} = y\,\vec{a}_x - x\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$ se calculó en el ejemplo 29 y se obtuvo como resultado:

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 1$$

La divergencia es constante por lo que la integral del lado derecho de la ecuación 21 se convierte en el producto de la divergencia por el volumen de una esfera de radio unitario.

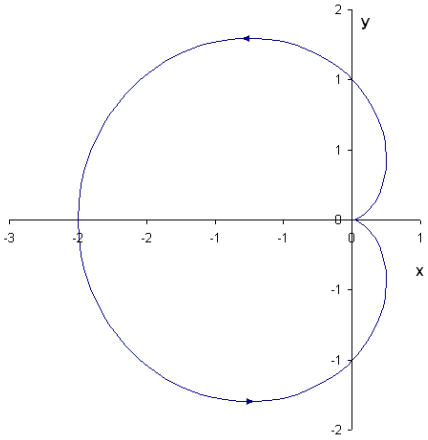
$$\oint_S \vec{A}\cdot \vec{dS} = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}$$

Ejercicios del capítulo

1. Demuestre que para todo Campo Vectorial **A** se cumple $\nabla \cdot \nabla \times A = 0$.

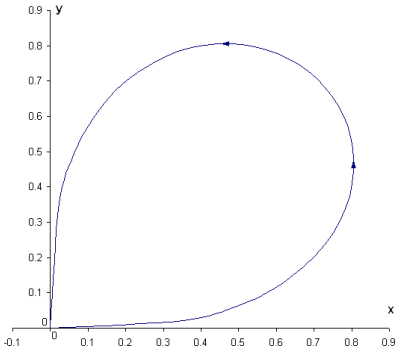
2. Demuestre que para todo Campo Escalar **B** se cumple $\nabla \times \nabla B = 0$.

3. Verifique que el campo $A = x\,\overrightarrow{a_x} + y\,\overrightarrow{a_y} + z\overrightarrow{a_z}$ cumple el Teorema de Stokes para la curva $r = 1 - Cos\varphi$ que se muestra en la figura.



4. Verifique que el campo $A = y\,\overrightarrow{a_x} - x\,\overrightarrow{a_y} + ze^z\overrightarrow{a_z}$ cumple el Teorema de Stokes sobre la curva definida por:

$$r^2 = Cos2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$



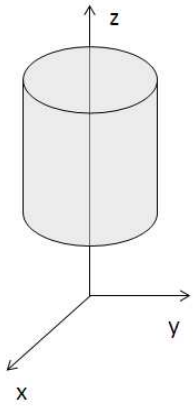
5. Encuentre el lugar geométrico de todos los puntos en los cuales la divergencia es nula para el campo $F = x^2y\,\overrightarrow{a_x} + z\,\overrightarrow{a_y} + xyz\overrightarrow{a_z}$

6. Dado el Campo Vectorial de fuerza $F = e^y\,\overrightarrow{a_x} + xe^y\,\overrightarrow{a_y}$

- Calcule el trabajo realizado al desplazarse dentro de este campo sobre la curva $y = 2x$ en el intervalo $x = [0,1]$.
- Verifique que el campo F es conservativo.
- Encuentre un campo $\Phi\ tal\ que\ F = \nabla\Phi$.
- Encuentre la ecuación de las Líneas de Fuerza del campo.

7. Dado un Campo Vectorial $A = r^2\,\overrightarrow{a_r} - r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\overrightarrow{a_\varphi}$.

Calcule el flujo de salida del campo A sobre el cilindro limitado por las superficies: $r = 1$ $1 < z < 2$



8. Dado el Campo Vectorial de fuerza $F = (x + y)\,\overrightarrow{a_x} + (x^2 - y^2)\,\overrightarrow{a_y}$.

- Encuentre la ecuación de las Líneas de Fuerza.
- Defina si el campo es conservativo.

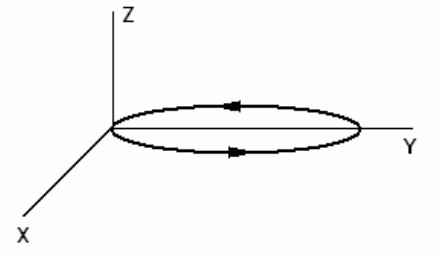
9. Dado el Campo Vectorial de fuerza $F = (x + y)\,\overrightarrow{a_x} + (x - y)\,\overrightarrow{a_y}$.

- Encuentre la ecuación de las Líneas de Fuerza.
- Defina si el campo es conservativo.

10. Dado un Campo Vectorial $F = y\,\overrightarrow{a_x} + x^2\,\overrightarrow{a_y}$ defina si el campo presenta circulación o si presenta divergencia, encuentre la ecuación de las Líneas de Fuerza.

11. Dado un Campo Vectorial $F = xy^2\,\overrightarrow{a_x} + yx^2\,\overrightarrow{a_y} - z\,\overrightarrow{a_z}$. Calcule el flujo neto de entrada del campo, sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12. Dado un Campo Vectorial $\mathrm{A} = \mathrm{r}\,\overrightarrow{\mathrm{a_r}} + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\overrightarrow{\mathrm{a_\varphi}}$. Calcule la circulación del campo sobre la curva $\mathrm{r} = 3\mathrm{Sen}(\varphi)\ ;\ \mathrm{z} = 0$ en sentido anti horario, como se muestra en la figura. Defina si el campo es conservativo.



13. Dado un Campo Vectorial $F = 2x^2\,\overrightarrow{a_x} - xy\,\overrightarrow{a_y} + 8z\,\overrightarrow{a_z}$. Calcule:

- El flujo neto de entrada del campo, sobre el cubo: $0 < x, y, z < 1$

- Calcule el trabajo realizado al desplazarse dentro de este campo sobre la curva $x^2 + 2y - 1 = 0$ en el intervalo $x = [0,1]$.

14. Dado el Campo Vectorial de fuerza $F = (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{a_x} + (x - y)\,\overrightarrow{a_y}$ calcule la circulación del campo sobre el cuadrado de lado unitario formado por los puntos: $(0,0)(0,1)(1,1)(1,0)$. Defina si el campo es conservativo.

Respuestas de los ejercicios

3. $\oint_C A \cdot dl = 0 \qquad \nabla \times A = 0$

4. $\oint_C A \cdot dl = 1 \qquad \int_S \nabla \times A \cdot \vec{ds} = 1$

5. $xy = 0.$

6. $W = 7.38 \quad \Phi(x, y) = xe^y + c \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + c$

7. flujo $= \pi$

8. $y = ce^{-x} + x - 1$ No conservativo.

9. $y^2 - x^2 + 2xy = c$ Conservativo.

10. Circulación $\forall\, x \neq \frac{1}{2} \qquad Div(F) = 0 \qquad 3y^2 - 2x^3 = k$

11. flujo $= \frac{4\pi^2}{3}$

12. $C = 0$ No conservativo.

13. flujo $= -\frac{19}{2} \qquad W = \frac{11}{15}$

14. $C = 0$ Conservativo.

Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para teoría básica de campos y naturaleza de los campos escalares y vectoriales:

Feynman, Richard, Leighton, Robert B., Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics-Mainly electromagnetism and matter*. Sexta edición. USA: Addison Wesley publishing company S.A., 1963. Volumen 2. Capítulo 2. ISBN 0-201-02010-6.

Para propiedades de los campos vectoriales Divergencia y Rotacional:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. *Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones*. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 66-97. ISBN 968-880-954-3.

Cheng, David K. *Fundamentos de electromagnetismo para Ingeniería*. Primera edición. Argentina: Addison Wesley Iberoamericana, 1997. Páginas 43-61. ISBN 0-201-65375-3.

Capítulo 3

Teoría del Campo Electrostático

Introducción

El primero de los campos con los que existe cierta familiaridad es con el llamado Campo Electrostático. Como su nombre lo indica, corresponde a un campo invariante en el tiempo fruto de una acumulación de carga eléctrica y que por su misma naturaleza es responsable de la acción eléctrica a distancia.

Cuando se mira el horizonte en una noche de tormenta, es común ver las descargas eléctricas y escuchar un poco tiempo después los truenos. Aunque la circulación de corriente y la descarga misma es de tipo dinámica, los fenómenos que preceden a la descarga son de naturaleza Electrostática, y obedecen a la acumulación lenta de carga eléctrica que termina venciendo la capacidad aislante del aire y generando estos maravillosos rayos que calientan el aire circundante a varios miles de grados produciendo la explosión sonora que se conoce como trueno.

En este capítulo se tratan los principios básicos de la Electrostática y en particular las propiedades de los medios físicos que determinan su comportamiento frente a lo que se conoce como la acción eléctrica.

Fundamentos del Campo Eléctrico

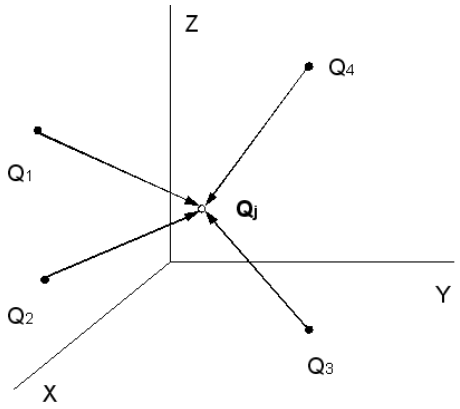
Ley de Coulomb

La Ley de Coulomb establece la magnitud de la fuerza de atracción o repulsión entre cargas eléctricas en función de su distancia de separación y la magnitud de la carga eléctrica asociada.

Cuando se calcula la fuerza total sobre una carga debida a una distribución discreta de **n** cargas adicionales, se obtiene una expresión equivalente a:

$$\vec{F}_j = kQ_j \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\left|\vec{R}_j - \vec{R}_i\right|^3}\left(\vec{R}_j - \vec{R}_i\right) \quad k = 9\times10^9 \; Nm^2/C^2$$

Donde el subíndice j representa el objeto cargado que experimenta la fuerza y el subíndice i el conjunto de cargas que ejercen fuerza sobre dicho objeto, y los vectores Rj y Ri apuntan hacia la carga que recibe la fuerza y hacia cada carga generadora de fuerza, respectivamente.



Cuando la distribución de carga puede considerarse de naturaleza continua, como en el caso de una densidad lineal volumétrica o superficial de carga, la sumatoria se convierte en una integral de línea, volumen o superficie de la distribución según sea el caso.

$$\vec{F} = kQ\int_C \frac{\rho_L}{\left|\vec{R}_0 - \vec{R}\right|^3}\left(\vec{R}_0 - \vec{R}\right)dl \qquad \vec{F} = kQ\int_S \frac{\rho_S}{\left|\vec{R}_0 - \vec{R}\right|^3}\left(\vec{R}_0 - \vec{R}\right)dS$$

$$\vec{F} = kQ\int_V \frac{\rho_V}{\left|\vec{R}_0 - \vec{R}\right|^3}\left(\vec{R}_0 - \vec{R}\right)dv$$

Independientemente de la distribución de carga discreta o continua, la fuerza de Coulomb cumple las siguientes propiedades:

- La fuerza de Coulomb cumple el principio de superposición.
- Esta fuerza es una cantidad vectorial cuya magnitud dirección y sentido dependen de la ubicación de la carga Q_j.
- Por lo tanto, la fuerza de Coulomb en una región de espacio constituye un campo vectorial.

Definición de Campo Eléctrico

El Campo Eléctrico es una función que asocia a cada punto del espacio una magnitud vectorial igual a la fuerza Electrostática que experimentaría una carga puntual unitaria (Q_j=1 Coulomb) localizada en el punto.

A diferencia de la fuerza de Coulomb, la existencia del Campo Eléctrico no está condicionada a la existencia de una carga que reciba la fuerza, ya que se asocia un valor hipotético de fuerza que recibiría una carga unitaria localizada en el punto, en el caso de que estuviera presente.

Las ecuaciones del campo eléctrico, por tanto, son iguales a las de la fuerza Electrostática, divididas por la carga Qj, receptora de la fuerza:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{kQ_i}{\left|\vec{R}_0 - \vec{R}_i\right|^3}\left(\vec{R}_0 - \vec{R}_i\right) \qquad \vec{E} = k\int_C \frac{\rho_L}{\left|\vec{R}_0 - \vec{R}\right|^3}\left(\vec{R}_0 - \vec{R}\right)dl$$

$$\vec{E} = k\int_C \frac{\rho_S}{\left|\vec{R}_0 - \vec{R}\right|^3}\left(\vec{R}_0 - \vec{R}\right)dS \qquad \vec{E} = k\int_V \frac{\rho_V}{\left|\vec{R}_0 - \vec{R}\right|^3}\left(\vec{R}_0 - \vec{R}\right)dv$$

El Campo Electrostático hereda todas las propiedades de la fuerza Electrostática, incluyendo su naturaleza de Campo Vectorial.

Unidades de medida del Campo Eléctrico

Como se desprende de la definición, la medida del Campo Eléctrico es unidad de fuerza por unidad de carga:

$$E = \frac{Newton}{Coulomb}$$

Pero también se puede expresar en unidades de energía multiplicando numerador y denominador por una unidad de distancia:

$$E = \frac{Newton \times m}{Coulomb \times m}$$

La unidad de fuerza por unidad de distancia equivale a unidad de trabajo, por lo tanto se reemplaza por Julios:

$$E = \frac{Joule}{Coulomb \times m}$$

Esta unidad se puede interpretar como la energía necesaria para desplazar una carga eléctrica positiva en contra de la fuerza de Coulomb equivalente a 1Newton a lo largo de una distancia de un metro.

A la unidad que relaciona el trabajo en Julios necesario para mover una carga eléctrica, en presencia de campos eléctricos, se le denomina Voltio y es equivalente a:

$$1 \quad Voltio = \frac{Joule}{Coulomb}$$

Por lo tanto las unidades de campo eléctrico quedan expresadas en:

$$E = \frac{Voltio}{m}$$

Unidad que resulta mucho más cómoda en problemas de electricidad y electrónica.

Líneas de Fuerza del Campo Eléctrico

La representación de los campos eléctricos, al igual que todos los campos vectoriales, se hace mediante Líneas de Fuerza que representan la continuidad de la orientación de los vectores de campo sobre una región definida.

En los alrededores de una carga puntual aislada, localizada en el origen de Coordenadas Esféricas, la ecuación del Campo Electrostático es:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{\left|\vec{R}\right|^2}\vec{a}_R$$

Campo Electrostático generado por una carga puntual

Las fuerzas que se experimentan en los alrededores de una carga puntual son de naturaleza radial y el sentido está determinado por el signo de la carga, como se muestra en la figura 20.

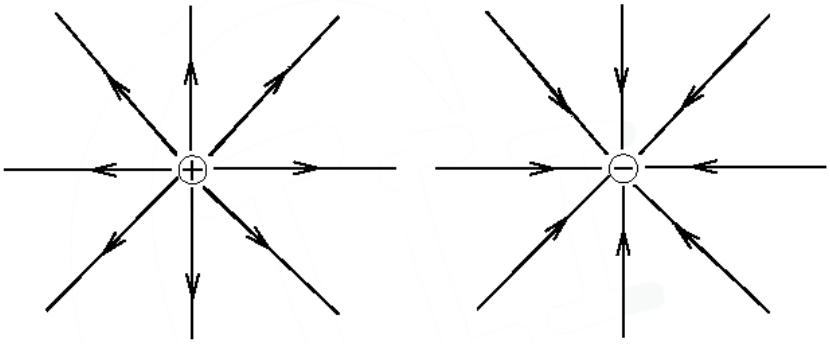


Figura 20. Líneas de Fuerza de una carga puntual

Para diferentes configuraciones discretas de carga, surgen diferentes combinaciones de Líneas de Fuerza y distribuciones de Campo Eléctrico. En la figura 21 se muestra la distribución de Líneas de Fuerza para el caso de dos cargas eléctricas de igual o diferente signo.

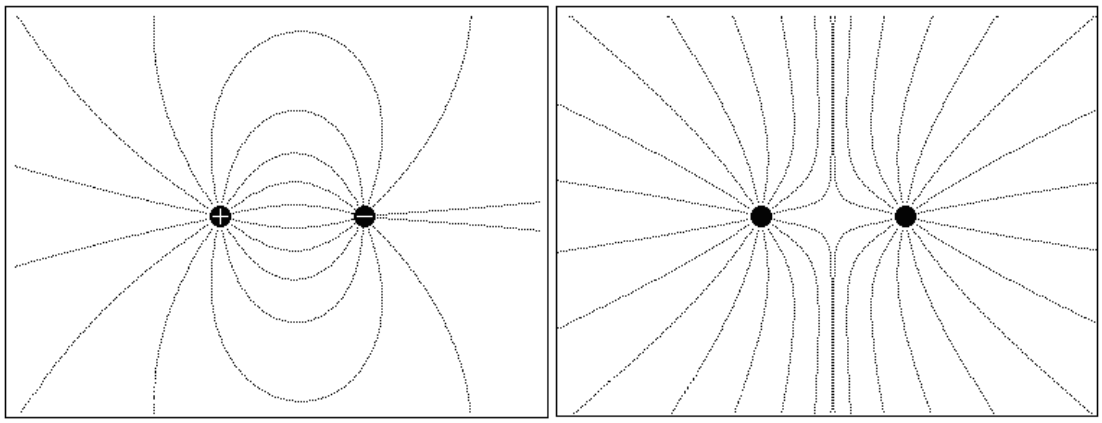


Figura 21. Distribución de Líneas de Fuerza para dos cargas puntuales

Energía y potencial eléctrico

El Campo Eléctrico de una carga puntual es conservativo:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(\frac{kQ}{R^2} \vec{a}_R \right) = \nabla \times \left(E_R \, \vec{a}_R \right) = 0$$

Por el principio de superposición el campo debido a cualquier distribución discreta o continua de cargas también lo será, por lo que el campo eléctrico cumple las condiciones necesarias para que exista un Campo Escalar asociado ϕ tal que:

$$E = \nabla \Phi$$

De acuerdo con el teorema fundamental del cálculo:

$$\phi(B) - \phi(A) = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

La integral de la derecha representa el trabajo por unidad de carga eléctrica, necesario para transportar una carga desde el punto A hasta el punto B, por tanto, la función ϕ se asocia con la energía por unidad de carga almacenada por una carga que se encuentra en el punto B, al respecto, la energía de la misma carga sí se localiza en el punto A y su unidad en el SI es de energía (Joules) por unidad de carga (Coulomb).

$$\phi_{AV}\left(Diferencia\ \ de\ \ potencial\right) = \frac{Energía\ \ potencial\left(Joules\right)}{Q\left(Coulomb\right)} = Voltios$$

Por lo tanto, la función ϕ está asociada con la diferencia de potencial entre los puntos A y B, comúnmente llamada **voltaje**.

Invirtiendo los valores de la función ϕ:

$$\phi(A)-\phi(B)=\phi_{AB}=-\int_{A}^{B}\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

Lo que queda en términos de voltaje como:

$$V_A-V_B=V_{AB}=-\int_{A}^{B}\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

Si se supone que el punto B se encuentra en el infinito y el punto A a una distancia **R** de la carga puntual que genera el campo, resulta válido pensar que la energía potencial de una carga en el infinito, donde el campo **E** tiende a cero, debe ser cero, por lo que la ecuación se vuelve una función de valor:

$$V_R=\frac{kQ}{R}$$

Que representa la energía potencial eléctrica de una carga puntual con respecto al infinito en el punto R. Resulta evidente la relación entre el campo eléctrico y la energía potencial eléctrica por unidad de carga:

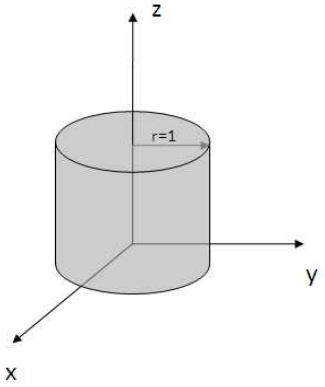
$$E=-\nabla V$$

Ejemplo 31. Cálculo del campo eléctrico asociado a una función de potencial eléctrico.

Dentro de la región $r \leq 1$, definida en Coordenadas Cilíndricas, el potencial con respecto al infinito está definido por la ecuación:

$$V=\frac{z\,Sen\varphi}{r}Voltios$$

Calcule el campo eléctrico al interior de la región y la componente perpendicular y tangencial del campo en la superficie $r=1$:



Solución:

En la región interior:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{a}_\varphi - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{zSen\varphi}{r^2}\vec{a}_r - \frac{zCos\varphi}{r^2}\vec{a}_\varphi - \frac{Sen\varphi}{r}\vec{a}_z$$

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{z}{r^2}\left(Sen\varphi\,\vec{a}_r - Cos\varphi\,\vec{a}_\varphi - \frac{r}{z}Sen\varphi\,\vec{a}_z\right)$$

La componente perpendicular a la curva $r = 1$ es la componente radial del campo:

$$\vec{E}_n = \frac{z}{r^2}Sen\varphi\,\vec{a}_r$$

La componente tangencial del campo se encuentra determinada por las componentes restantes:

$$\overrightarrow{E_n} + \overrightarrow{E_T} = \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E_T} = \vec{E} - \overrightarrow{E_n}$$

Por lo tanto:

$$\vec{E}_T = -\frac{z}{r^2}\left(Cos\varphi\,\vec{a}_\varphi - \frac{r}{z}Sen\varphi\,\vec{a}_z\right)$$

Ejemplo 32. Cálculo de potencial eléctrico asociado a un campo eléctrico.

El Campo Eléctrico de un sistema de dos electrodos en el vacío se encuentra definido por la ecuación en Coordenadas Cilíndricas:

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\pi r}\overrightarrow{a_\varphi}$$

Encuentre:

La ecuación del potencial eléctrico, si se supone que $V = 0$ en el plano $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
La diferencia de potencial entre dos puntos situados sobre el cilindro r=0.5m, entre las coordenadas: $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ sobre el plano $z = 1$

Solución:

Dado que el campo eléctrico no tiene componente en r ni en z, se supone que el potencial varía exclusivamente con φ.

$$E = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Se resuelve la ecuación diferencial:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{V_0}{\pi r}$$

Por lo que se obtiene:

$$V(\varphi) = k_1 - \frac{V_0}{\pi}\varphi$$

Cuando se incluye la condición: $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$k_1 - \frac{V_0}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{V_0}{2}$$

Por lo que el potencial queda:

$$V(\varphi) = V_0\left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi}\right)$$

Reemplazando:

$$V_{AB} = V\left(\frac{3\pi}{2}\right) - V(0) = V_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \times \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{V_0}{2} = -\frac{3V_0}{2}$$

Cuando se trata de distribuciones finitas de carga, se pueden usar las siguientes ecuaciones para el cálculo de la función potencial en una determinada región.

Para una distribución lineal de carga

$$V = k\int \frac{\rho_L}{R} dl$$

Distribución superficial:

$$V = k\int \frac{\rho_S}{R} dS$$

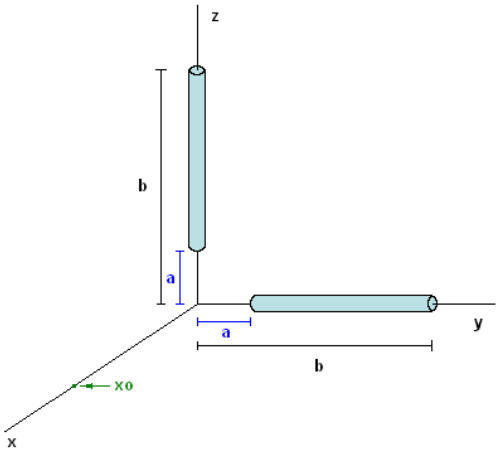
Distribución volumétrica:

$$V = k\int \frac{\rho_V}{R} dV$$

Donde R es la distancia entre el sitio de ubicación del diferencial de carga y el punto analizado.

Ejemplo 33. Cálculo de potencial eléctrico para una distribución de carga lineal.

Calcule el potencial eléctrico V que produce la carga distribuida sobre las dos varillas finitas ubicadas sobre los ejes y y z mostradas en la figura sobre un punto cualquiera situado en el eje x.



Solución:

Se usa la ecuación de potencial para una distribución lineal de carga:

$$V = k\int \frac{\rho_L}{R} dl$$

Por simetría, se observa que se puede calcular el potencial debido a una sola varilla y multiplicarlo por dos, usando el principio de superposición:

En este caso particular:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad dl = dy$$

$$V = 2k\int_a^b \frac{\rho_L}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

Resolviendo:

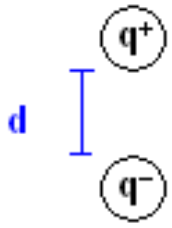
$$V = 2kLog\left[2 \times \left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)\right]_a^b$$

Evaluando:

$$V = 2kLog\left[\frac{\sqrt{x^2 + b^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} + x}\right]$$

El dipolo eléctrico elemental

Un dipolo eléctrico está formado por un par de cargas puntuales de igual valor y diferente polaridad, separadas por una pequeña distancia **d,** como se muestra en la figura.



Configuración geométrica de un dipolo eléctrico

Se puede calcular el potencial eléctrico en un punto cualquiera del espacio debido a la presencia de un dipolo elemental y luego deducir la expresión para el cálculo del campo eléctrico según se muestra en la figura 22.

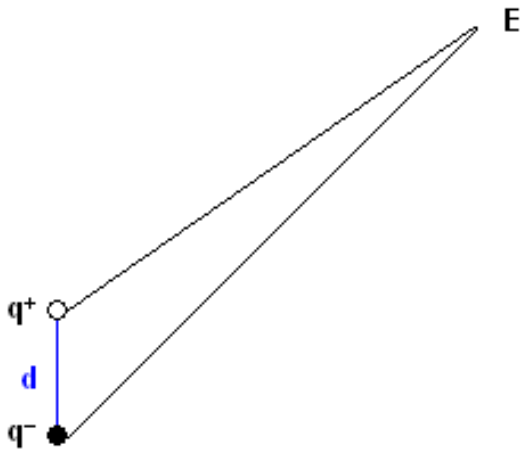


Figura 22. Campo eléctrico de un dipolo en un punto lejano

El potencial debido a una carga puntual es un valor conocido, por lo que el potencial debido a la presencia de ambas cargas del dipolo se puede calcular usando superposición y un sistema de coordenadas (en este caso esféricas), según lo demuestra la figura 23.

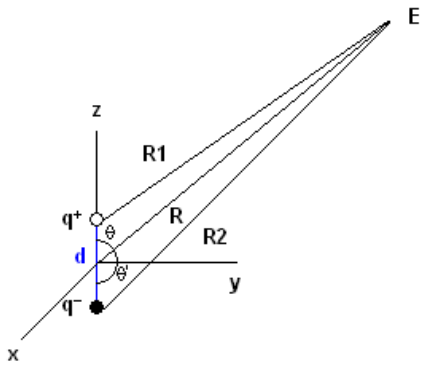


Figura 23. Construcción geométrica para el cálculo del Campo eléctrico de un dipolo

El potencial debido al sistema de cargas queda igual a:

$$V = \frac{kq}{R_1} + \frac{k(-q)}{R_2} = kq\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Esto es equivalente a:

$$V = kq\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

Los valores de R_1 y R_2 se pueden expresar usando el teorema del coseno como:

$$R_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2 - 2\left(\frac{d}{2}\right)RCos\,\theta$$
$$R_2^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2 + 2\left(\frac{d}{2}\right)RCos\,\theta$$

El producto de R_1 y R_2 queda entonces:

$$R_1 R_2 = \left\{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2\right]^2 - \left(R\,dCos\,\theta\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Factorando el valor de R^2

$$R_1 R_2 = R^2\left\{\left[\left(\frac{d}{2R}\right)^2 + 1\right]^2 + \left(\frac{d}{R^3}Cos\,\theta\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Para los casos en que $d << R$

$$\left(\frac{d}{2R}\right)^2 \cong 0 \quad y \quad \left(\frac{d}{R^3}\right)^2 \cong 0$$

Por lo tanto:

$$R_1 R_2 \cong R^2$$

De acuerdo con la figura 24, la diferencia $R_2 - R_1 \cong dCos\theta$

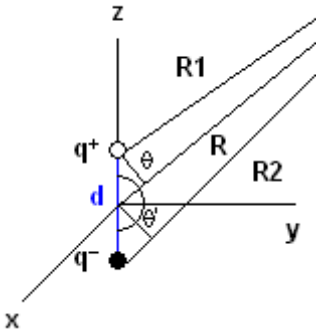


Figura 24. Aproximación al campo de un dipolo en un punto alejado

Con lo que la expresión queda:

$$V = \frac{kqdCos\theta}{R^2}$$

Ecuación 22. Potencial eléctrico debido a un dipolo

Esta ecuación se puede proyectar sobre un plano $\varphi = Cte$ con el propósito de visualizar la distribución de líneas equipotenciales, según se muestra en la figura 28, la cual fue obtenida para los siguientes parámetros:

$$k = 9\times10^9 \quad {}^{Nm^2}\!/_{Coul^2} \qquad d = 10mm \qquad q = 1\,uC$$

Se trazaron las equipotenciales para V=±90, ±180, ±360 y ±720V modificando $\theta: 0 \rightarrow \pi$ y encontrando R para cada caso. La tabulación y el trazado del grafico se hizo con ayuda de Microsoft Excel®

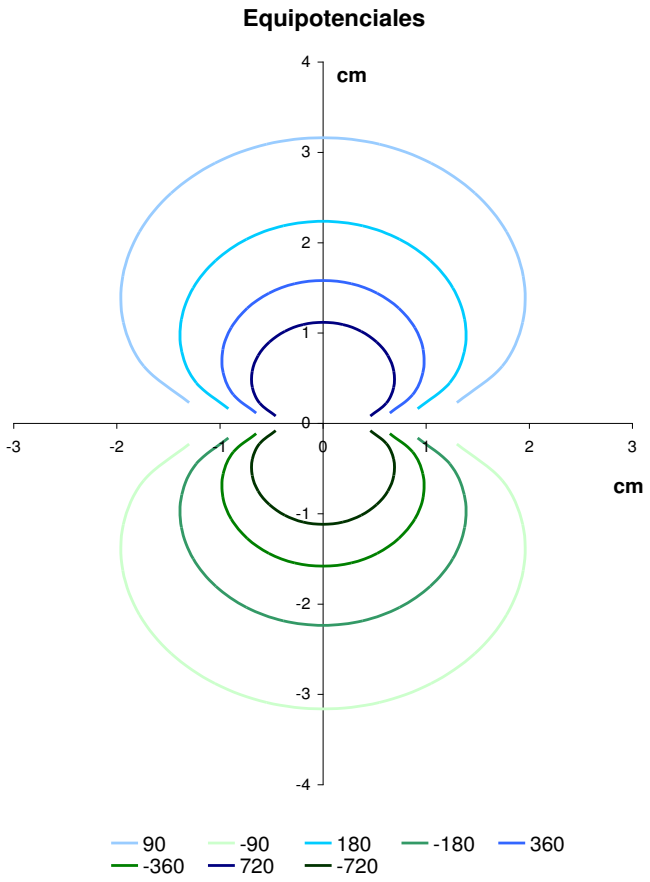


Figura 25. Líneas equipotenciales en voltios de dos cargas de 1uC, separadas por una distancia de 1cm.

Para el cálculo del campo eléctrico se usa la ecuación:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial R}\vec{a}_R - -\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta$$

Calculando el gradiente de potencial en Coordenadas Esféricas:

$$\vec{E} = 2\frac{kqdCos\theta}{R^3}\vec{a}_R + \frac{kqdSen\theta}{R^3}\vec{a}_\theta$$

Lo cual es equivalente a:

$$\vec{E} = \frac{kqd}{R^3}\left(2Cos\theta\,\vec{a}_R + Sen\theta\,\vec{a}_\theta\right)$$

Ecuación 23. Campo eléctrico de un dipolo en Coordenadas Esféricas

Al igual que en el caso anterior, las Líneas de Fuerza se pueden trazar usando una proyección sobre un plano $\varphi = Cte$ al resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{d\theta} = \frac{E_R}{E_\theta} = 2Cotg\theta$$

Por separación de variables se obtiene:

$$\int \frac{1}{R} dR = c + \int 2Cotg\theta d\theta$$

$$Ln(R) = c + Ln(Sen^2\theta)$$

De donde se obtiene una familia de curvas que responden a la ecuación:

$$R = MSen^2\theta$$

Para diferentes valores de la constante de integración M se obtiene un trazado de Líneas de Fuerza como la que se muestra en la figura 26.

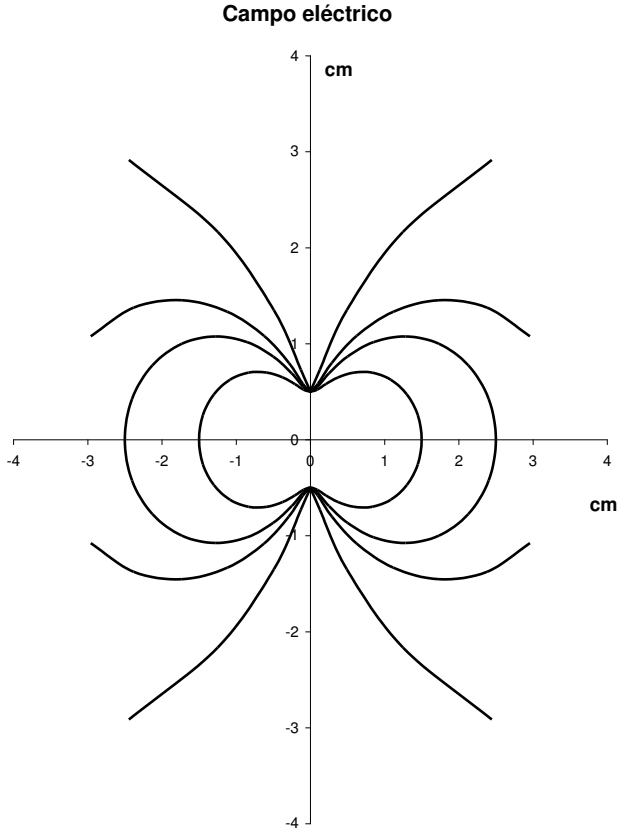


Figura 26. Líneas de Fuerza del Campo Eléctrico ocasionado por un dipolo

Ejemplo 34. Cálculo de la diferencia de potencial en presencia de un dipolo eléctrico.

El campo eléctrico de un dipolo cumple las siguientes condiciones:

$$k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{Coul^2} \quad q = 1\mu C \quad d = 10mm.$$

Encuentre la diferencia de potencial entre dos puntos situados sobre la esfera R=0.1m, entre las coordenadas: $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ sobre el plano $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Solución:

En el caso de la curva presentada, R y φ son constantes, por lo tanto:

$$\overrightarrow{dl} = -Rd\theta\overrightarrow{a_\theta}$$

$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{kqd}{R^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2Cos(\theta)\overrightarrow{a_R} + Sen(\theta)\overrightarrow{a_\theta}] \cdot (-Rd\theta\overrightarrow{a_\theta})$$

$$V_{AB} = \frac{kqd}{R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen(\theta)d\theta$$

$$V_{AB} = \frac{kqd}{R^2}[-Cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{kqd}{R^2}$$

Para los valores dados:

$$V_{AB} = \frac{\left(9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{Coul^2}\right)(1 \times 10^{-6}Coul)(10^{-2}m)}{(10^{-1}m)^2} = 9000V$$

Propiedades del Campo Electrostático

Circulación y Rotacional

Dado que el campo eléctrico es igual al gradiente de un Campo Escalar, se puede deducir que:

$$\nabla \times E = -\nabla \times \nabla V = 0$$

Esta propiedad se conoce como Ley de Voltajes de Kirchhoff, en su formulación diferencial

A partir del Teorema de Stokes se puede deducir que la circulación del Campo Electrostático independientemente de la trayectoria escogida es siempre nula:

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_S \nabla\times\vec{E}\cdot\vec{dS} = 0$$

Esta ecuación representa la llamada Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK), en formulación integral.

La LVK para un conjunto de puntos A, B, C, D de la trayectoria se puede ilustrar de una forma más familiar, tal como se usa en teoría de circuitos.

Dado un Campo Electrostático en una región del espacio y una trayectoria cerrada, como los que se muestran en la figura 27, la sumatoria de elevaciones y caídas de potencial a lo largo de la trayectoria es igual a cero.

$$\oint_C E\cdot dl = \int_A^B E\cdot dl + \int_B^C E\cdot dl + \int_C^D E\cdot dl + \int_D^A E\cdot dl = -\left(V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA}\right) = 0$$

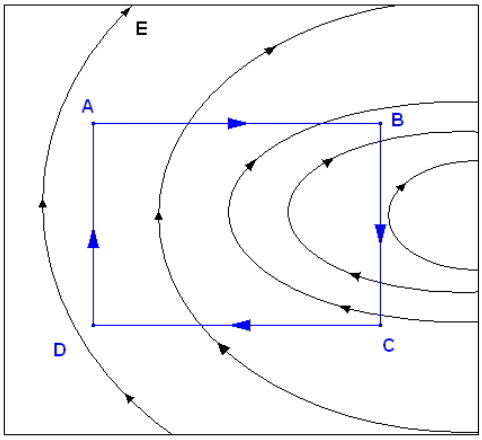


Figura 27. Camino cerrado en un campo eléctrico para ilustrar la LVK

Flujo y divergencia

De acuerdo con la Ley de Gauss, el flujo eléctrico de salida que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por la superficie:

$$\oint_S D\cdot dS = \Psi = Q_{enc}$$

Ecuación 24. Ley de Gauss en forma integral

De la Ley de Gauss se deduce que las unidades en las que se mide la densidad de flujo son de carga sobre unidades de área, es decir, las mismas unidades en que se mide la densidad superficial de carga:

$$D \times m^2 = Coul \quad \Longrightarrow \quad D = {Coul}/{m^2}$$

La carga encerrada en un volumen resulta igual a la integral sobre el volumen de la densidad volumétrica de carga; por lo tanto, se deduce que:

$$Q_{enc} = \int_v \rho_v dv$$

De acuerdo con la Ley de Gauss:

$$Q_{enc} = \oint_S D \cdot dS$$

Usando el Teorema de la Divergencia.

$$\oint_S D \cdot dS = \int_V \nabla \cdot D \, dv$$

A partir de estas ecuaciones, resulta evidente la igualdad:

$$Q_{enc} = \int_V \nabla \cdot D \, dv = \int_V \rho_v \, dv$$

De donde se desprende la formulación diferencial

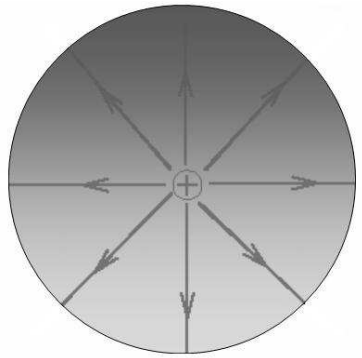
$$\nabla \cdot D = \rho_V$$

Ecuación 25. Ley de Gauss en forma diferencial

Debido a la proporcionalidad entre la carga y la intensidad de campo eléctrico, se puede suponer una proporcionalidad entre el campo eléctrico y la densidad de flujo eléctrico.

Esta proporcionalidad queda en evidencia al calcular la divergencia del campo eléctrico y compararla con la ecuación 25.

El flujo de salida de un campo eléctrico E, ocasionado por una carga puntual, se puede calcular con ayuda de una esfera centrada en el origen que rodee a la fuente de campo:



El diferencial de superficie sobre esta esfera es: $\overrightarrow{dS} = R^2 Sen\theta d\varphi d\theta \, \overrightarrow{a_R}$

Mientras el campo generado por una carga puntual Q es: $\vec{E} = \frac{kQ}{R^2} \, \overrightarrow{a_R}$

La integral para el cálculo del flujo de salida queda entonces:

$$flujo = kQ_{enc} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2} \vec{a}_R \cdot \left(R^2 Sen\theta \, d\theta \, d\varphi \vec{a}_R \right) = 4\pi k Q_{enc}$$

La divergencia está definida por el flujo de salida de una superficie diferencial cuando el volumen encerrado tiende a cero:

$$div \vec{E} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = 4\pi k \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q_{enc}}{\Delta v} = 4\pi k \rho_V$$

De donde resulta:

$$\nabla \cdot E = 4\pi k \rho_V$$

Cuando se asume que la constante de proporcionalidad no depende de las coordenadas, se tiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi k} E \right) = \rho_V$$

La constante k se reemplaza por una nueva constante obtenida a partir de la ecuación como:

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi k}$$

De donde se deduce que: $\nabla \cdot (\varepsilon E) = \rho_V$

Cuando se compara esta ecuación con la Ley de Gauss se obtiene

$$D = \varepsilon E \quad ; \quad \varepsilon = \frac{1}{4\pi k}$$

Ecuación 26. Relación entre campo eléctrico y densidad de flujo eléctrico

La constante **Є** depende del medio y recibe el nombre de permitividad eléctrica. Define la capacidad de un medio de permitir la presencia de un campo eléctrico en su interior. Cuando el medio en que se encuentra el campo eléctrico es el vacío, la constante **Є** se convierte en **$Є_0$** y representa la permitividad eléctrica del vacío que es una constante universal.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9 \, {Nm^2}/{Coul^2}} = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \frac{Coul}{Joule} \times \frac{Coul}{m}$$

La unidad Joule/Coulomb equivale a voltio, por lo que la permitividad queda:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \frac{Coul}{Voltio \times m}$$

Finalmente a la unidad Coulomb/Voltio se le denomina Faradio, por lo tanto la permitividad eléctrica del vacío queda definida por:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \frac{F}{m}$$

Propiedades de materiales en presencia del Campo Electrostático

Los materiales que poseen una baja capacidad para conducir la corriente eléctrica reciben el nombre de materiales dieléctricos o aislantes. Este tipo de materiales se caracterizan por ofrecer una gran resistencia al paso de la corriente, como es el caso de la madera, caucho o papel, y algunas resinas plásticas.

Los materiales que poseen una gran capacidad para conducir la corriente eléctrica se denominan conductores y se caracterizan porque ofrecen una muy escasa resistencia al paso de la corriente, como es el caso del cobre, el oro, la plata y algunos materiales cerámicos a bajas temperaturas.

Propiedades de los dieléctricos

Polarización

Algunos materiales poseen moléculas que, a pesar de ser eléctricamente neutras, presentan una distribución de carga ligeramente asimétrica, como en el caso de la molécula de agua,

constituida por dos átomos de Hidrógeno y un átomo de Oxígeno enlazados, como se muestra en la figura 28.

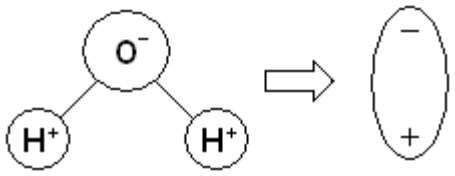


Figura 28. Molécula polar y su representación

En este caso, la asimetría del enlace hace que los átomos de Hidrógeno que pierden un electrón de valencia en el momento del enlace generen un exceso de carga de valor 2e+ hacia una parte de la molécula, mientras el átomo de Oxígeno al ganar dos electrones queda ionizado de forma negativa con una carga de 2e-.

El comportamiento eléctrico de la molécula es similar al de un dipolo, por lo que se dice que la molécula en cuestión es polar, o presenta polaridad intrínseca.

El exceso de carga, asociado a cada uno de los lados del dipolo, se denomina carga ligada, ya que a pesar de no poder circular libremente por el dieléctrico, si es capaz de producir efectos sobre cargas vecinas acoplándose al campo eléctricos existente.

En todos los materiales dieléctricos se presenta esta característica, la cual es la base para el comportamiento del medio en presencia del campo eléctrico. En este tipo de materiales, la fortaleza de los enlaces y la complejidad de la red molecular de los medios dieléctricos hacen muy difícil que los electrones de la capa de valencia de los átomos del material se liberen y circulen por el material en forma de corriente eléctrica; de donde se desprende su característica de aislantes.

En estas condiciones, cuando el material se somete a una diferencia de potencial o a un campo eléctrico externo, las moléculas del material tienden a alinearse con el campo externo; este fenómeno se denomina polarización y ocurre como se ilustra en la figura 29.

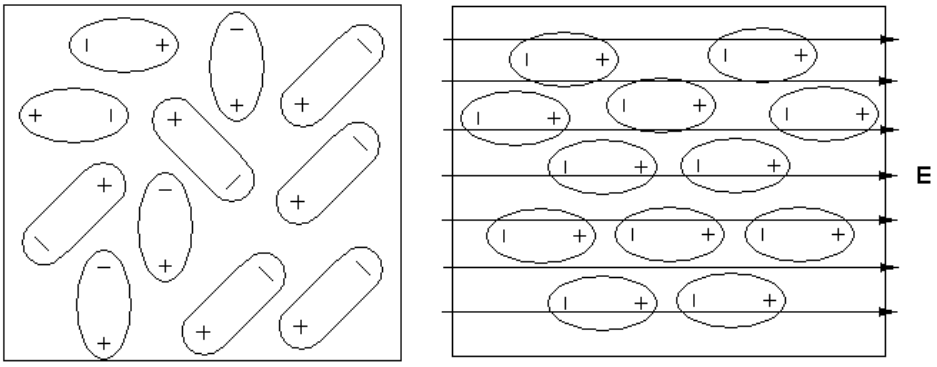


Figura 29. Material dieléctrico no polarizado y luego polarizado

En condiciones naturales, la organización caótica de las moléculas y los átomos no define ninguna polaridad en el material, pero en el momento de someter el material a un campo eléctrico externo, se consigue la polarización del mismo.

La polarización del medio se mide mediante una densidad de flujo de polarización que es proporcional a la densidad de flujo externa y se representa mediante un vector de campo P.

$$\vec{P} = \chi_e \vec{D} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

La constante de proporcionalidad χ_e recibe el nombre de susceptibilidad eléctrica y mide la capacidad del medio para reaccionar frente a la presencia de campos eléctricos externos.

La densidad de flujo de polarización se añade a la densidad de flujo exterior para obtener una densidad de flujo total en el medio, dada por:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

Permitividad

La constante de la Ley de Coulomb está directamente relacionada con la permitividad, dado que:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

Es decir, que entre mayor sea la permitividad de un medio, menor va a ser la fuerza de Coulomb entre dos cargas eléctricas localizadas en su interior, por tanto, menor será la intensidad de campo eléctrico.

Los dieléctricos presentan una permitividad eléctrica superior a la del vacío y su valor depende especialmente de la capacidad polarizarse que tenga el material, de acuerdo con la ecuación:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

En términos prácticos, se usa para caracterizar en un medio la permitividad relativa, que expresa la cantidad de veces que la permitividad de un medio es superior a la del vacío, esto es:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

A su vez, la permitividad relativa está relacionada con la susceptibilidad eléctrica, con la relación:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

En la tabla 1 se muestra la permitividad relativa de algunos materiales de uso común en Ingeniería Electrónica.

Tabla 1. Permitividad relativa de diferentes materiales a baja frecuencia

Material	Permitividad $\in_r$
Aire	1.0006
Madera seca	1.5-4.0
Teflón	2.1
Polietileno	2.26
Aceite mineral	2.3
Poliestireno	2.5
Ámbar	2.7
Caucho	2.3-4.0
Papel	3.0
Lucita	3.2
Nylon	3.6
Plexiglás	3.45
Baquelita	4.8
Vidrio	6.0
Cuarzo	3.8
Tierra seca	3.0
Cloruro de Sodio	5.9
Silicio	11.8
Mica	6.0
Óxido de Aluminio	8.8
Ferrita	12.4
Nylon	3.5
Porcelana	6
Alcohol Etílico	25
Agua destilada	81
Dióxido de Titanio	100
Titanato de Bario	1200

Ruptura dieléctrica y descarga Electrostática

La ruptura dieléctrica es un fenómeno que ocurre en campos eléctricos de gran intensidad, bajo los cuales el material aislante pierde su capacidad de aislamiento y entra en conducción. Es un proceso normalmente destructivo y ocurre cuando se produce un rayo o cuando salta una chispa entre dos líneas separadas por un espacio de aire, el cual se considera normalmente aislante. Al fenómeno de conducción que se presenta en esta condición se le llama descarga electrostática, y es el fruto de la acumulación lenta de carga, lo cual produce una gran intensidad de campo eléctrico, suficiente para impulsar la descarga.

La intensidad de una descarga se mide por la energía que libera, pero en cualquier caso su presencia es poco deseable, ya que calienta el aire circundante y puede ocasionar incendios en presencia de gases combustibles, como vapores de gasolina u oxígeno.

La ruptura dieléctrica ocurre cuando se altera la estructura molecular del aislante permitiendo la liberación de cargas; y esto normalmente ocurre porque el esfuerzo eléctrico es demasiado alto, superando el umbral de resistencia de las moléculas del material, las cuales se rompen liberando su carga ligada.

Previo al proceso de ruptura se presenta una fuerte ionización, después de lo cual los dieléctricos adquieren gran capacidad de conducción, dejando de ser aislantes y transformándose en conductores.

En el momento en que el dieléctrico adquiere propiedades conductoras se produce una fuerte descarga denominada arco eléctrico que se comporta como un cortocircuito a través del material, el cual produce diferentes efectos entre los que se cuentan:

- Altas temperaturas (miles de grados Celsius).
- Destrucción del dieléctrico o de cualquier otro elemento que entre en contacto con él.
- Incendio, dependiendo de la temperatura de ignición del aislante o de los materiales que le rodean.
- Pérdida total del aislamiento.
- Ruido ocasionado por la expansión térmica del aire que rodea el material.
- Explosión por evaporación de los materiales que entran en contacto con la descarga.

Debido a las graves consecuencias derivadas de una descarga de este tipo, resulta una situación absolutamente indeseable en un entorno industrial, a menos que se realice en condiciones controladas, como por ejemplo en procesos de soldadura.

En la figura 30, se muestra la curva característica de respuesta de un material aislante en presencia de un campo eléctrico generado por una diferencia de potencial.

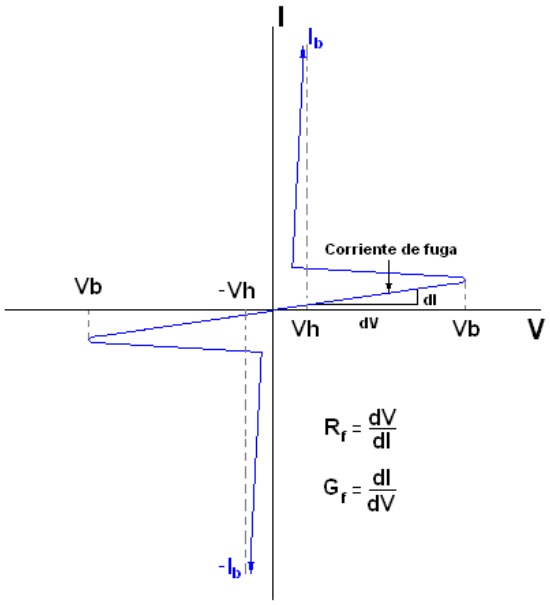


Figura 30. Curva de respuesta VI de un material aislante

Dentro de la curva se pueden observar claramente tres zonas de operación que se ilustran en la figura 31.

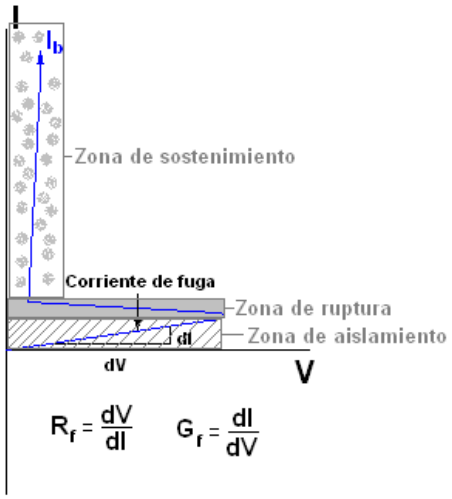


Figura 31. Zonas de operación de un material aislante

En la primera zona, denominada de aislamiento, el material se comporta como aislante, permitiendo el paso de una corriente muy pequeña (micro o nano amperios) a medida que se incrementa el voltaje aplicado.

En la segunda zona, llamada de ruptura, se alcanza la intensidad máxima de campo eléctrico que puede soportar el material, las moléculas del material empiezan a romperse generando una fuerte ionización y el material se vuelve conductor. El voltaje necesario para pasar de la zona de aislamiento a la zona de ruptura se denomina voltaje de ruptura o "*breakdown voltage*".

En la tabla 2, se muestran los valores de referencia para voltajes máximos de operación de los condensadores comerciales, los cuales se encuentran basados en el voltaje de ruptura del dieléctrico con un margen de seguridad.

Tabla 2. Voltajes máximos de operación para condensadores comerciales

Tipo	Conductor	Dieléctrico	Capacidad	V. max
Electrolítico de Aluminio	Aluminio	Óxido de Aluminio Al_2O_3	0,1-10mF	4-10V
			2,2-4700uF	16-40V
			0,47-2200uF	63-160V
			2,2-220uF	200-450V
Cerámico	Plata	Cerámica	0,56-560pF	63-100V
			0,47-330pF	250-500V
Cerámico	Aluminio	Poliéster	4,7nF-1,5uF	100-160V
			1n-470nF	400-1000V
Mica	Aluminio	Mica	2pF-22nF	250-4000V

En esta zona de operación, la diferencia de potencial decrece abruptamente empezándose a comportar como un cortocircuito, sostenido por un pequeño voltaje denominado de sostenimiento Vh (*Holding voltage*), con el cual pasa a la siguiente zona de operación.

En la tercera, denominada zona de sostenimiento (Holding), circula a través del material una corriente muy alta, suficiente para calentar el medio circundante a temperaturas de miles de grados Celsius, hasta agotar completamente la fuente que le proporciona energía a la descarga (lo cual ocurre normalmente en pocos segundos o milisegundos, dependiendo de la energía de la descarga). La corriente que circula por el material depende de la potencia de la fuente que alimente el cortocircuito, llegando a ser en algunos casos de varios cientos o miles de Amperios.

En algunos casos, por ejemplo, cuando el aislamiento es gaseoso o líquido, se puede recuperar la capacidad aislante al eliminar la fuente de energía que alimenta la descarga; en el caso de los aceites industriales, quedan en éstos residuos de carbón que con el paso del tiempo van degradando la calidad del aceite, obligando a su reemplazo cada cierto periodo de tiempo.

En el caso de los aislamientos sólidos, nunca se recupera la capacidad aislante, por lo que se hace necesario su reemplazo inmediato.

Corriente de fuga

Es la corriente que circula por el material dieléctrico en la zona de aislamiento. Recibe este nombre debido a que no debería circular para un aislamiento perfecto, pero, debido a imperfecciones de manufactura u otras propias del material, se escapa a través del mismo y circula de forma estable.

En el caso de los condensadores electrolíticos, la corriente de fuga se encuentra en el orden de 0.01uA/uF/Voltio, llegando como máximo a unos pocos microamperios; sin embargo, el valor exacto depende del condensador y se puede consultar en las hojas de características correspondientes (datasheets).

La relación entre la corriente de fuga y el voltaje aplicado es una característica del circuito equivalente del material, denominada conductancia de fuga, como se ilustra en la figura 31.

$$G_f = \frac{Corriente\ de\ fuga}{Voltaje} = \frac{I_f}{V}$$

El inverso de la conductancia de fuga se denomina resistencia de fuga, y en los aislantes de buena calidad es del orden de varios millones de ohmios.

En el caso de los aislantes comerciales, la resistencia de fuga se mide usando un equipo conocido como “Megger”, pero cuyo nombre técnico es megóhmetro, y se diferencia de los medidores normales de resistencia eléctrica en que aplica diferente potencial de varios miles de voltios para medir la corriente de fuga y en forma indirecta la resistencia de fuga como indicador de la calidad del aislamiento.

En la figura 32, se muestra el circuito equivalente de un megóhmetro, el cual en su forma más elemental consiste en una fuente de varios kilovoltios, con su resistencia interna de unos pocos ohmios conectada en serie con un galvanómetro o dispositivo de bobina móvil, en el cual se hace la lectura de la corriente de fuga o de resistencia de fuga.

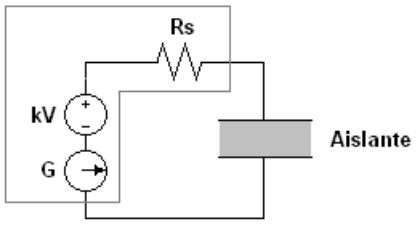


Figura 32. Circuito equivalente de un megóhmetro de bobina móvil

En la figura 33, se exponen imágenes de dos tipos diferentes de megóhmetro, digital y analógico.

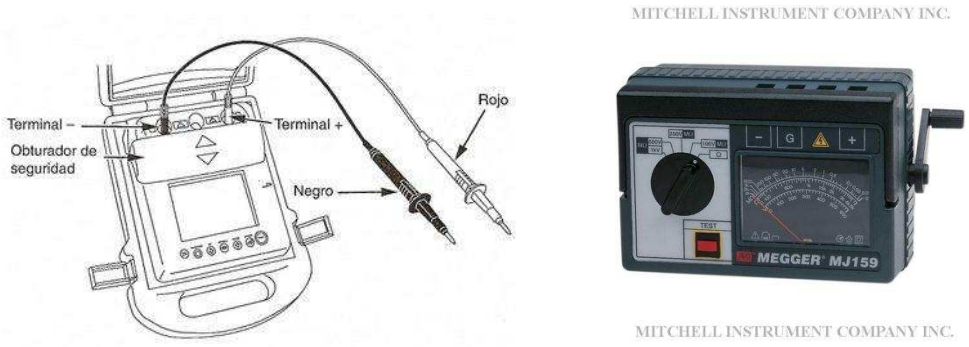


Figura 33. Esquema general y presentación de dos tipos de megóhmetro, digital y analógico

Rigidez dieléctrica

Se denomina rigidez dieléctrica a la capacidad de un dieléctrico de soportar campos eléctricos de alta intensidad sin perder sus propiedades aislantes, es decir, sin que se produzca la ruptura dieléctrica.

La rigidez dieléctrica se mide en unidades de campo eléctrico. Sin embargo, debido a los altos valores que presenta esta constante en algunos medios, se usan también los múltiplos de la unidad fundamental, kV/m, MV/m, kV/mm, etc.

La rigidez dieléctrica es un indicador de la calidad de un aislamiento, por tanto, de su capacidad de aislar eléctricamente dos elementos que se encuentren a diferente potencial y su valor depende fundamentalmente de la estructura del material, de la calidad del proceso de producción y de las condiciones de operación del mismo.

En la tabla 3, se muestran algunos valores de referencia para la rigidez dieléctrica de materiales de uso común en Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

Tabla 3. Rigidez dieléctrica de algunos aislantes de uso común

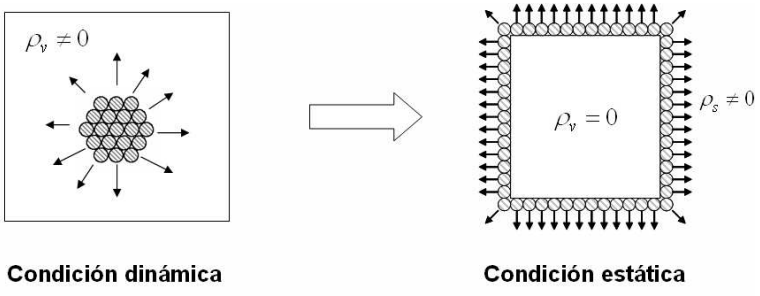
Material	Rigidez dieléctrica MV/m
Aire	1
Helio	0.15
Agua destilada	30
Aceite mineral	15
Papel	15
Papel parafinado	32-40
Polietileno	20-60
Caucho	25
Teflón	60
Vidrio de ventana	10
Mica	20-70

Propiedades de los conductores

Un conductor, por definición, es un tipo de material que conduce el calor o la electricidad, generalmente los buenos conductores eléctricos lo son también térmicos.

Esto significa que en el interior de un conductor puede circular con relativa facilidad la corriente eléctrica sin que el medio oponga mayor resistencia, es decir, que las cargas eléctricas se pueden mover con similar facilidad.

Por esta razón, en el interior de un conductor no puede existir una densidad volumétrica de carga libre[5] en condiciones estáticas, ya que por la fuerza de repulsión de Coulomb, estas cargas migrarían hacia la frontera del conductor como se muestra en la figura.



[5] Se entiende por carga libre, aquella que no se encuentra firmemente atada o enlazada a la estructura molecular o cristalina de un determinado material, en oposición a la carga ligada, tratada con anterioridad.

Al cabo de un corto tiempo, llamado tiempo de relajación del material, cualquier exceso de carga libre remanente en el interior del conductor migra hacia la frontera del mismo, dando origen a una densidad superficial de carga.

Al no existir densidad volumétrica de carga ni fuerza eléctrica de Coulomb, por simple definición no existe campo eléctrico equivalente a la fuerza por unidad de carga.

$$\rho_v = 0 \qquad E = 0$$

Debido a la ausencia de campo eléctrico, la diferencia de potencial en cualquier par de puntos del interior del conductor es cero, por lo que toda la masa del conductor es una masa equipotencial, y la superficie del conductor se convierte en una superficie equipotencial.

$$V_A - V_B = V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

Esta aproximación en realidad es válida solo en condiciones estáticas, ya que en condiciones dinámicas, es decir cuando existe carga en movimiento al interior del conductor, la carga libre que se transporta por el conductor genera un pequeño campo eléctrico que puede ser cuantificado a través de la llamada Ley de Ohm, que se estudiará en detalle más adelante.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son aquellas que permiten analizar el comportamiento del campo eléctrico en la frontera entre dos medios, mutuamente acotados.

Las fronteras pueden ser esencialmente de dos tipos: frontera entre un conductor y un dieléctrico, como la que se presenta en los límites de estructuras metálicas, marcos de ventanas, puertas, etc. Y frontera entre dos dieléctricos de diferente permitividad, como la que se presenta en los límites de una ventana de cristal, o en donde termina una pared y sigue un espacio abierto.

Condiciones de frontera de Dirichlet y Newmann

Existen esencialmente dos tipos de condiciones de frontera en Electrostática: la de Dirichlet, se refiere a fronteras en las cuales se conoce el potencial eléctrico, es decir a superficies equipotenciales.

La condición de Dirichlet usualmente está asociada a fronteras entre conductores y dieléctricos, debido a la naturaleza del campo eléctrico en el interior de los materiales conductores, pero puede estar asociada a otros tipos de frontera.

La de Neumann, se refiere a fronteras en las cuales se conoce la densidad superficial de carga o la carga puntual, como la superficie de contacto entre dieléctricos de diferente permitividad.

En algunos casos puede también estar asociada a fronteras conductor dieléctrico, pero no es el caso más común.

Algunos materiales aislantes, como el polietileno, tienen la capacidad de almacenar carga Electrostática en su superficie debido al rozamiento. Esto es fácil de percibir cuando se tocan bolsas de supermercado o cuando se frota una bolsa plástica con otra y luego se acerca la bolsa a la piel, la electricidad estática se puede percibir en los vellos de la piel.

Frontera dieléctrico – conductor

Debido a que la superficie de un conductor es una superficie equipotencial, la diferencia de potencial entre dos puntos de la misma debe ser cero por definición. De acuerdo con la ecuación de la diferencia de potencial, se tiene que:

$$V_A - V_B = V_{AB} = -\int_A^B \vec{E_T} \cdot \vec{dl} = 0$$

Donde E_T es la componente tangencial del campo eléctrico, según se aprecia en la figura 34.

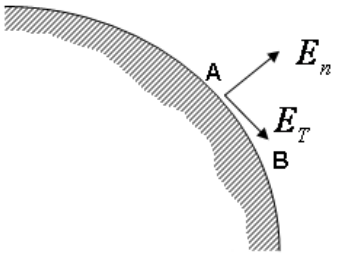


Figura 34. Campo eléctrico en la frontera conductor dieléctrico

La única forma en que dicha diferencia de potencial sea cero, independientemente de A y B, es cuando la componente tangencial de campo es cero.

Se concluye, por lo tanto, que en una frontera conductor-dieléctrico, tanto el campo eléctrico, como la densidad superficial de flujo son normales a la superficie del conductor en todos los puntos de la misma.

En estas condiciones, se puede usar la Ley de Gauss para calcular la densidad de flujo en la frontera como se muestra en la figura 35.

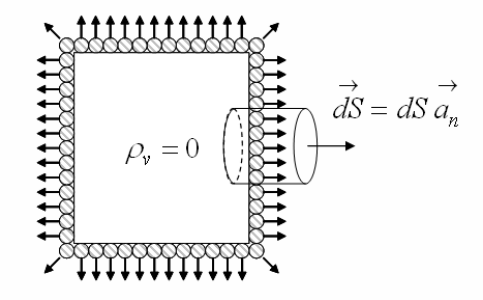


Figura 35. Densidad de flujo en la superficie de un conductor

Usando una superficie cilíndrica de Gauss en la frontera, la integral de Gauss en la tapa del cilindro que queda dentro del conductor, en ausencia de campo eléctrico es exactamente cero.

Igual pasa con las integrales sobre la superficie cilíndrica, ya que la densidad tangencial de flujo, al igual que el campo tangencial es cero.

En estas condiciones. La integral de la Ley de Gauss queda reducida a la tapa exterior del cilindro de Gauss.

$$\left(D_n\,\vec{a}_n\right)\cdot\left(dS\,\vec{a}_n\right) = \rho_s dS$$

$$D_n dS = \rho_s dS$$

De donde resulta que la densidad normal de flujo es igual a la densidad superficial de carga.

$$D_n = \rho_s$$

Esta ecuación resulta particularmente útil, en el caso de los condensadores, ya que en éstos esta misma condición de frontera se presenta en la superficie de contacto entre las placas conductoras y el material aislante. En este caso, la intensidad de campo eléctrico normal a la frontera, que depende directamente del voltaje aplicado al condensador, se multiplica por la permitividad del aislante dando origen a la densidad de flujo, cuyo valor es igual a la densidad de carga que se deposita sobre las placas.

En este caso, entre mayor permitividad tenga el dieléctrico, mayor será la densidad de carga y por lo tanto mayor la capacidad de almacenamiento de carga del condensador.

Frontera dieléctrico – dieléctrico

Cuando un campo electrostático atraviesa la frontera entre dos materiales dieléctricos, sus componentes presentan modificaciones de acuerdo con las diferencias de permitividad en los

medios y con la presencia o ausencia de carga eléctrica acumulada en la frontera. Estas diferencias se pueden deducir a partir de las propiedades del Campo Electrostático.

En la figura 36 se ilustra la situación:

Un campo eléctrico atraviesa la frontera entre dos medios con diferente permitividad ε_1 y ε_2, formando ángulos α_1 y α_2 con la normal a la frontera.

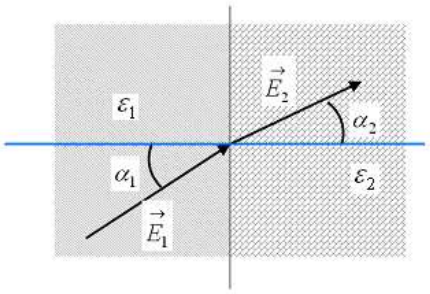


Figura 36. Condiciones de frontera entre dieléctricos

Las características que deben cumplir los campos a ambos lados de la frontera, independientemente de la permitividad son la Ley de Voltajes de Kirchhoff y la Ley de Gauss.

En la figura 37, se utiliza una trayectoria cerrada y las componentes tangencial y normal de los campos eléctricos a ambos lados de la frontera, para ilustrar la relación entre componentes tangenciales de campo.

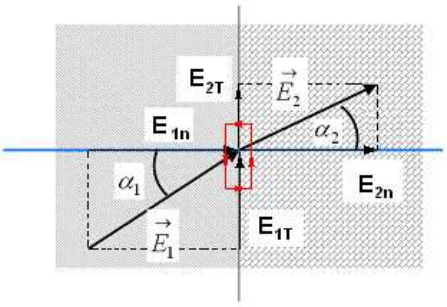


Figura 37. Condiciones de frontera en dieléctricos componente tangencial

De acuerdo con la Ley de Voltajes de Kirchhoff se debe cumplir que:

$$\oint E \cdot dl = 0$$

Para cualquier trayectoria cerrada, en particular una que se proponga el límite de la frontera. Por lo tanto:

$$\left(E_{2T}\,\vec{a}_y\right)\cdot dy\left(\vec{a}_y\right)+\left(E_{1n}\,\vec{a}_x\right)\cdot dx\left(-\vec{a}_x\right)+\left(E_{1T}\,\vec{a}_y\right)\cdot dy\left(-\vec{a}_y\right)+\left(E_{2n}\,\vec{a}_x\right)\cdot dx\left(\vec{a}_x\right)=0$$

Para ser condiciones de frontera, se hace que $dx \to 0$ con lo que queda:

$$\left(E_{2T}\,\vec{a}_y\right)\cdot dy\left(\vec{a}_y\right)+\left(E_{1T}\,\vec{a}_y\right)\cdot dy\left(-\vec{a}_y\right)=0$$

Se hacen los productos escalares y se saca factor común del diferencial:

$$\left(E_{2T}-E_{1T}\right)dy=0 \quad \Rightarrow \quad E_{1T}=E_{2T}$$

De donde se deduce que las componentes tangenciales de campo a ambos lados de la frontera son iguales independientemente de la diferencia de permitividad.

Para analizar la componente normal, se usa una superficie de Gauss diferencial en la frontera, como se ilustra en la figura 38.

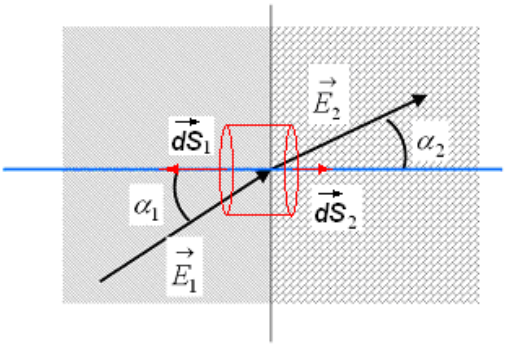


Figura 38. Condiciones de frontera en dieléctricos componente normal

En este caso, si se desea que la superficie se encuentre en la frontera, los lados del cilindro deben tender a cero, por lo que la integral de flujo sobre el borde del cilindro se hace cero, quedando solamente el flujo sobre las tapas.

Suponiendo la existencia de una densidad superficial de carga ρ_s en la frontera entre dieléctricos, se cumple que:

$$\varepsilon_1\,\vec{E}_1\cdot\vec{dS}_1+\varepsilon_2\,\vec{E}_2\cdot\vec{dS}_2=Q=\rho_S\,dS$$

Del gráfico se define que $\vec{dS}_1=dS\left(-\vec{a}_x\right)$ y $\vec{dS}_2=dS\,\vec{a}_x$, por lo tanto:

$$\varepsilon_1\,\vec{E}_1\cdot dS\left(-\vec{a}_x\right)+\varepsilon_2\,\vec{E}_2\cdot\left(dS\,\vec{a}_x\right)=Q=\rho_S\,dS$$

Cuando se hacen los productos escalares se obtiene:

$$(\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n})dS = \rho_S dS$$

Reduciendo dS $\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_S$

Cuando no se presenta densidad superficial de carga en la frontera se tiene:

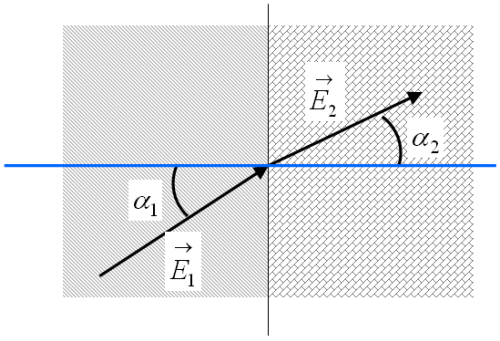
$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$$

Ejemplo 35. Condiciones de frontera en materiales dieléctricos.

La región $y < 1$ se encuentra llena con un material de permitividad relativa 2. La región $y \geq 1$ se encuentra llena con un material de permitividad relativa 3, según se muestra en la figura.

Un campo eléctrico $E_1 = y\overrightarrow{a_x} + x\overrightarrow{a_y}$ se encuentra presente en la región $y < 1$. Encuentre el campo eléctrico en la región $y \geq 1$.

Calcule los ángulos $\alpha 1$ y $\alpha 2$ que forman los campos $\overrightarrow{E_1}$ y $\overrightarrow{E_2}$ con la normal a la frontera en el punto (3, 1, 2).



Solución:

El campo normal es la componente **y**, mientras el campo tangencial es la componente **x**; porque la frontera es paralela al plano **xz**.

Condiciones de frontera: $E_{2T} = E_{1T} = E_{1x} = y$

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \quad \Rightarrow \quad E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1y} = \frac{2}{3}x$$

El campo 2 queda: $\vec{E}_2 = y\,\vec{a}_x + \frac{2}{3}x\,\vec{a}_y$

Los campos evaluados en el punto (3, 1, 2) quedan:

$$\overrightarrow{E_1}(3,2,1) = \overrightarrow{a_x} + 3\overrightarrow{a_y} \qquad \overrightarrow{E_2}(3,2,1) = \overrightarrow{a_x} + 2\overrightarrow{a_y}$$

Los ángulos pedidos son:

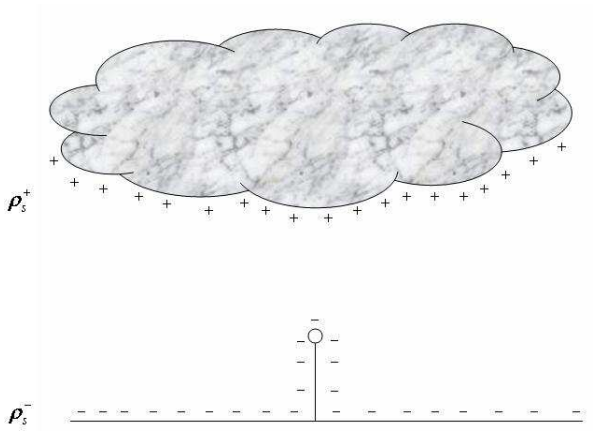
$$\alpha_1 = Tan^{-1}\left(\frac{E_{T1}}{E_{n1}}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 19^0 \quad \alpha_2 = Tan^{-1}\left(\frac{E_{T2}}{E_{n2}}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{1}{32}\right) = 27^0$$

El ángulo α aumenta al pasar al medio 2, lo que significa que el campo se aleja de la normal, es decir, la frontera se comporta como una lente divergente.

Funcionamiento del sistema pararrayos

Los sistemas de pararrayos utilizan las propiedades del campo eléctrico para generar un sistema de protección contra descargas atmosféricas, incrementando la probabilidad de que una descarga eléctrica se produzca en un punto específico de la topografía de un terreno.

A partir de la ecuación de potencial y de las ecuaciones del campo eléctrico, se puede discernir el funcionamiento de estos sistemas, usando para ello un modelo de una línea conductora terminada en una esfera como el que se muestra en la figura, en presencia de una nube de tormenta:



Si se puede modelar la superficie de la tierra como una esfera equipotencial y que la esfera del pararrayos tiene el mismo potencial al estar físicamente conectados, se tiene que:

$$V_{tierra} = \frac{kQ_{earth}}{R_{earth}} \qquad \text{y} \qquad V_p = \frac{kQ_p}{R_p}$$

De donde se obtiene que:

$$V_{tierra} = V_p \quad \Rightarrow \quad \frac{kQ_{earth}}{R_{earth}} = \frac{kQ_p}{R_p}$$

La carga almacenada en la esfera del pararrayos queda definida por:

$$Q_p = \left(\frac{R_p}{R_{earth}} \right) Q_{earth}$$

La intensidad de campo eléctrico generada sobre la superficie de la tierra es entonces:

$$E_{earth} = \frac{kQ_{earth}}{R_{earth}^2}$$

Mientras la generada sobre la esfera del pararrayos viene definida por:

$$E_p = \frac{kQ_p}{R_p^2}$$

Al hacer la relación entre las dos intensidades de campo eléctrico se encuentra:

$$\frac{E_p}{E_{earth}} = \frac{Q_p R_{earth}^2}{Q_{earth} R_p^2} = \frac{\left(\frac{R_p}{R_{earth}} \right) Q_{earth} R_{earth}^2}{Q_{earth} R_p^2}$$

Reduciendo:

$$\frac{E_p}{E_{earth}} = \frac{R_{earth}}{R_p}$$

Lo cual demuestra que el campo eléctrico se intensifica, en la punta del pararrayos en presencia de una nube de tormenta, a valores considerablemente altos. En la figura 39, se muestran varios tipos de terminaciones de pararrayos comerciales, en los cuales se reduce al mínimo la punta metálica para que la relación entre radio de la punta y radio de la tierra tienda a infinito.

Figura 39. Forma de varios tipos de pararrayos comerciales

El modelo no se encuentra completo hasta que cuenta con un sistema de conducción de la energía del rayo a la tierra, para reducir al máximo la probabilidad de que una descarga de alta energía resulte en muerte o lesiones graves para las personas que circular cerca del pararrayos.

El sistema de conducción de energía normalmente se encuentra constituido por un conjunto de barras conductoras hechas de cobre o aluminio, soldadas entre sí, formando una estructura circular o rectangular denominada malla de tierra, porque se encuentra enterrada unos cuantos centímetros bajo la superficie del terreno y conectada directamente con el pararrayos. Cuando se produce una descarga, la corriente circula por la malla hasta difundirse por el terreno, minimizando la posibilidad de daño a las personas o animales que se encuentren dentro de la zona protegida.

El conjunto de malla de tierra y pararrayos recibe el nombre de apantallamiento, como se muestra en la figura 40.

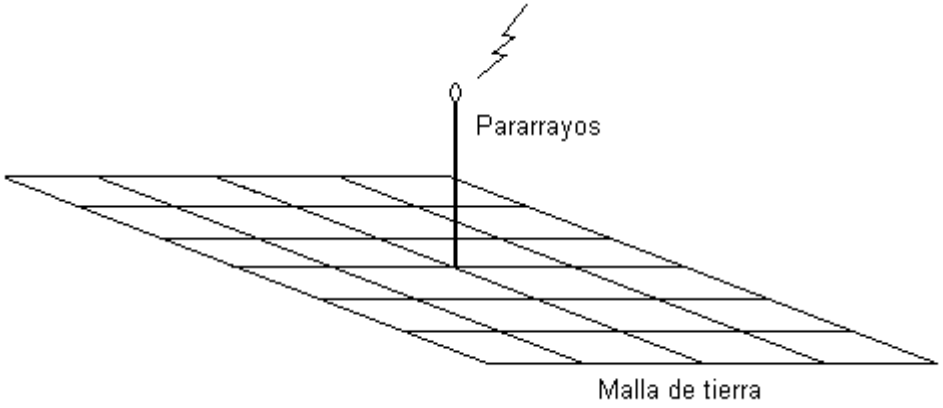


Figura 40. Sistema de apantallamiento contra descargas atmosféricas

Ecuaciones de Poisson y de Laplace

La ecuación de Laplace se deriva directamente de la definición de potencial eléctrico y de la Ley de Gauss.

$$E = -\nabla V \qquad \nabla \cdot D = \rho_V \qquad D = \varepsilon E$$

En donde ρ_V es la densidad volumétrica de carga libre y ε la permitividad del medio.

Reemplazando se obtiene:

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = \rho_V$$

Equivalente a la ecuación:

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho_V$$

Cuando la permitividad se puede asumir constante:

$$\nabla^2 \mathrm{V} = -\frac{\rho_V}{\epsilon}$$

Esta ecuación se llama de Poisson,[6] de propósito general, y permite obtener un cálculo del potencial eléctrico en regiones con presencia de carga libre.

Cuando la ecuación de Poisson se resuelve en regiones sin densidad volumétrica de carga se reduce a la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0$$

En los diferentes sistemas de coordenadas, la ecuación de Poisson para permitividad constante se escribe:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_V}{\epsilon}$$

Ecuación de Poisson en Coordenadas Cartesianas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_V}{\epsilon}$$

Ecuación de Poisson en Coordenadas Cilíndricas

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 Sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(Sen\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 Sen^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial z \varphi^2} = -\frac{\rho_V}{\epsilon}$$

Ecuación de Poisson en Coordenadas Esféricas

Para resolver la ecuación de Poisson, se cuenta con métodos de tipo analítico y numérico.

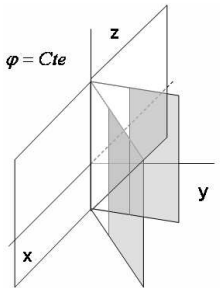
[6] En honor de Simeón Denis Poisson, 1781–1840. Alumno de Laplace y Lagrange. A los 18 años formuló la Teoría de las diferencias Finitas para resolver la ecuación que lleva su nombre.

En los métodos analíticos, se encuentra una función **V** que cumpla la ecuación diferencial y a su vez las condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann.

En lo numérico se trata de aproximar la función de potencial, conocido el valor en la frontera.

Ejemplo 36. Condiciones de frontera en frontera dieléctrico – conductor.

Dos placas conductoras perfectas se encuentran ubicadas en el vacío, en los planos $\varphi = 0$ y $\varphi = \varphi_0$ limitadas por los radios $r = a$ y $r = b$ y los planos $z = -1$ y $z = 1$, tal como se muestra en la figura.



Utilice condiciones de frontera de Neumann y la ecuación de Laplace para calcular la capacitancia entre placas.

Solución:

Ecuación de Laplace en cilíndricas, componente φ.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Solución de la ecuación: $V(\varphi) = k_1\varphi + k_2$

Condiciones de Neumann: $V(0) = V_0$ $V(\varphi_0) = 0$

Por lo tanto: $V_0 = k_2$ $k_1\varphi_0 + k_2 = 0$

Resolviendo: $k_1 = -\frac{V_0}{\varphi_0}$

Por lo tanto: $V(\varphi) = \frac{V_0}{\varphi_0}(\varphi_0 - \varphi)$

Aplicando el gradiente: $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{a_\varphi} = \frac{V_0}{r\varphi_0}\overrightarrow{a_\varphi}$

Densidad de Flujo: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{r\varphi_0}\overrightarrow{a_\varphi}$

Condiciones de frontera: $D_n = \rho_s = \frac{\varepsilon_0 V_0}{r\varphi_0}$

Calculo de la carga: $Q = \int \rho_S dS = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\varphi_0}\int_{-1}^{1}\int_a^b \frac{1}{r} dr dz$

$$Q = \frac{2\varepsilon_0 V_0}{\varphi_0} Ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacitancia es la cantidad de carga almacenada por unidad de voltaje, por lo tanto:

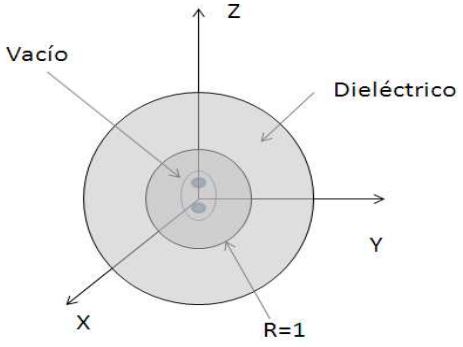
$$C(F) = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\varepsilon_0}{\varphi_0} Ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ejercicios del capítulo

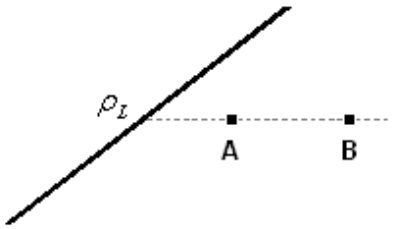
1. En un dipolo centrado en el origen se tiene que $k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{Coul^2}$, $q = 100\mu C$, $d = 10mm$.

Si se supone que el dipolo se rodea por un material dieléctrico de permitividad relativa 10, a partir de la superficie R=1. Calcule:

- El ángulo formado por el campo con la normal a la frontera en el punto $\left(R = 1, \theta = 37^0, \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ en ambos lados de la frontera.
- La magnitud del vector de polarización P en el dieléctrico.



2. La diferencia de potencial V_{AB} entre dos puntos situados a 20cm. y 40cm. de una línea de carga de longitud 20cm., como se muestra en la figura, es de 10V. Calcule la densidad de carga lineal.



3. Dada la densidad de flujo eléctrico $D = (x + y)\,\overrightarrow{a_x} + (x - 2y)\,\overrightarrow{a_y}$.

- Encuentre la magnitud y ángulo que forma dicha densidad de flujo con la normal a un cilindro $r = 1$ en el punto $z = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$
- Encuentre la densidad de flujo para la región $r > 1$ si se suponen las siguientes condiciones: $\epsilon_r = 1 \quad r < 1 \;;\; \epsilon_r = 10 \quad r > 1 \quad \rho_s(r = 1) = 0$
- Calcule la carga encerrada por el cilindro $r = 1$ y los planos $0 < z < 1$

4. Dada una densidad de flujo eléctrico $D = \frac{12}{r}\overrightarrow{a_r}\ {}^{\mu Coul}/_{m^2}$ calcule la carga contenida en el volumen $-1 < z < 1\,, 1 < r < 2, 0 < \varphi < 2\pi$. Calcule la diferencia de potencial entre $r = 1$ y $r = 2$. Calcule la capacitancia total del sistema y la carga acumulada sobre la superficie $r = 2$. Utilice $\epsilon_r = 4$ en toda la región.

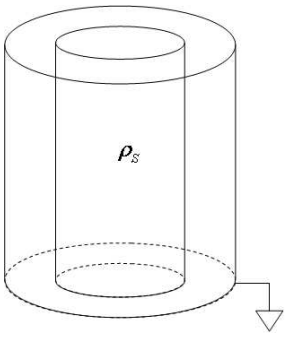
5. El campo eléctrico de un sistema de dos electrodos en el vacío se encuentra definido por la ecuación en Coordenadas Cilíndricas:

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\pi r}\overrightarrow{a_\varphi}$$

Encuentre:

- La ecuación del potencial eléctrico, si se supone que $V = 0$ en el plano $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
- La diferencia de potencial entre dos puntos situados sobre el cilindro r=0.5m, entre las coordenadas: $\varphi = 0\ y\ \varphi = \frac{3\pi}{2}$ sobre el plano $z = 1$
- La carga total sobre el plano limitado por $0.1 < r < 0.2 \quad 1 < z < 2 \;\; \varphi = \frac{\pi}{2}$.

6. Un cilindro conductor de longitud finita igual a 10cm y radio $r = 2cm.$ se encuentra rodeado por otro cilindro conductor de la misma longitud y de radio $r = 4cm$. El cilindro exterior se encuentra conectado a tierra, tal como se muestra en la figura.



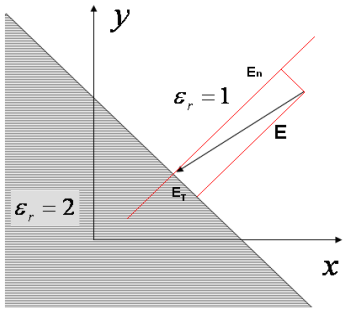
Sobre el cilindro interno se deposita una densidad superficial de carga $\rho_s = 30nC/m^2$ y la región entre los dos cilindros se llena con un aceite dieléctrico de permitividad relativa 10.

Una vez estabilizado el sistema, calcule:

- La densidad de carga eléctrica inducida sobre el cilindro externo.
- La intensidad de campo eléctrico en la región entre las placas.

Desprecie los efectos de borde en la región de finalización de las placas.

7. La curva $y = 2 - x$ separa dos regiones de diferente permitividad como se ve en la figura.

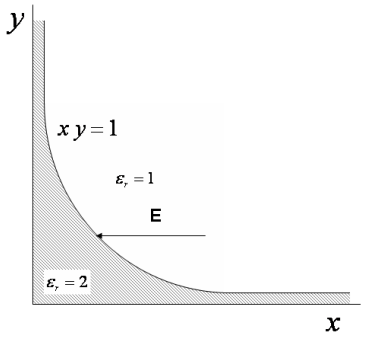


Si un campo eléctrico de ecuación $\vec{E} = -x^2\overrightarrow{a_x} - 3\overrightarrow{a_y}$ incide desde la derecha, calcule:

La componente tangencial y normal de campo en cada uno de los medios en el punto (1,1) y el ángulo que el campo total forma con la normal a cada lado de la frontera.

8. La curva $xy = 1$ separa dos regiones de diferente permitividad como se ve en la figura. Si un campo eléctrico de ecuación $\vec{E} = -E_0\overrightarrow{a_x}$ incide desde la derecha, calcule:

La componente tangencial y normal de campo en cada uno de los medios en el punto (1,1) y el ángulo que el campo total forma con la normal a cada lado de la frontera.



Respuestas a los ejercicios

1. $\alpha_1 = 21^0 \quad \alpha_2 = 75^0 \quad P = 446\frac{nC}{m^2}$
2. $\rho_L = -2.38\,{}^{nC}/_{m}$
3. $|D_1| = 1.84\ {}^{Coul}/_{m^2} \quad \alpha_1 = 258^0 \quad \overrightarrow{D_2} = -0.38\overrightarrow{a_r} - 18\overrightarrow{a_\varphi} \quad Q_{enc} = -\pi\ Coul$
4. $Q_{enc} = 0 \quad V_{AB} = 26kV \quad C = 5.8nF \quad Q = 48\pi\ \ \mu C$
5. $\mathbf{V(\varphi) = V_0\left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi}\right)} \quad \mathbf{V_{AB} = -\frac{3V_0}{2}} \quad \mathbf{Q = \frac{V_0}{\pi}\epsilon_0 Ln(2)}$
6. $\rho_{s-ext} = 15\,{}^{nC}/_{m^2} \quad \vec{E} = \frac{108\pi}{r}{}^{V}/_{m}\,\overrightarrow{a_r}$
7. $E_{1n} = -2\sqrt{2}\left(\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y}\right) \quad E_{1T} = 1.8\overrightarrow{a_x} - 0.2\,\overrightarrow{a_y} \quad E_{2n} = -\sqrt{2}\left(\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y}\right)$
$E_{2T} = 1.8\overrightarrow{a_x} - 0.2\,\overrightarrow{a_y} \quad \theta_1 = 25^0 \quad \theta_2 = 46^0$
8. $E_{1n} = -\frac{1}{2}E_0\left(\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y}\right) \quad E_{1T} = \frac{1}{2}E_0\left(\overrightarrow{a_y} - \overrightarrow{a_x}\right) \quad E_{2n} = -\frac{1}{4}E_0\left(\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y}\right)$
$E_{2T} = \frac{1}{2}E_0\left(\overrightarrow{a_y} - \overrightarrow{a_x}\right) \quad \theta_1 = 45^0 \quad \theta_2 = 63^0$

Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para conceptos generales y definiciones del campo eléctrico:

Hayt, William H. Buck, John A. *Teoría Electromagnética*. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 23-39. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para Ley de Gauss conceptos y aplicaciones, energía y potencial:

Hayt, William H. Buck, John A. *Teoría Electromagnética*. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 41-84. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para energía y potencial:

Cheng, David K. *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Primera edición. Argentina: Addison Wesley Iberoamericana, 1997. Páginas 90-96. ISBN 0-201-65375-3.

Para rigidez dieléctrica y condiciones de frontera:

Cheng, David K. *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Primera edición. Argentina: Addison Wesley Iberoamericana, 1997. Páginas 108-116. ISBN 0-201-65375-3.

Para teoría de materiales en presencia de campos electrostáticos y condiciones de frontera:

Reitz, John D., Milford, Frederick J., Christy, Robert W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Cuarta edición. México: Addison Wesley, 1996. Páginas 97-115. ISBN 968-444-403-6.

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. *Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones*. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 277-294. ISBN 968-880-954-3.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B., Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics-Mainly electromagnetism and matter.* Sexta edición. USA: Addison Wesley publishing company S.A., 1963. Volumen 2. Capítulo 11. ISBN 0-201-02010-6.

Para ecuaciones de Poisson y Laplace:

Cheng, David K. *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Primera edición. Argentina: Addison Wesley Iberoamericana, 1997. Páginas 129-136. ISBN 0-201-65375-3.

Para electricidad atmosférica y funcionamiento de los pararrayos:

Feynman, Richard, Leighton, Robert B., Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics-Mainly electromagnetism and matter*. Sexta edición. USA: Addison Wesley publishing company S.A., 1963. Volumen 2. Capítulo 9. ISBN 0-201-02010-6.

Capítulo 4

Flujo de corriente eléctrica en medios físicos

Introducción

En este capítulo se presenta un modelo clásico que aproxima la fenomenología asociada a la conducción de corriente sin considerar efectos cuánticos o relativistas.

A pesar de las limitaciones propias de los modelos clásicos, este modelo presenta una muy buena aproximación al comportamiento real de la corriente eléctrica en conductores y semiconductores; así como a la corriente de polarización o de desplazamiento en materiales dieléctricos

Un modelo preciso de circulación de corriente eléctrica a nivel de electrones requiere el uso de la teoría de probabilidades apoyada en los principios de la mecánica cuántica; sin embargo, a nivel macro, en donde no importa el movimiento individual de los electrones, sino la tendencia estadística del conjunto, los modelos clásicos son completamente válidos.

La unidad de medida de la intensidad de corriente eléctrica es el amperio simbolizado por la letra A, y representa el paso de una cantidad de carga equivalente a un Coulomb, por una determinada sección en un tiempo de un segundo.

$$Amperio(A) = \frac{Coulomb}{Segundo}$$

El flujo de electrones en unidades macro es aproximadamente de $6x10^{18}$ electrones/segundo/amperio, lo cual es una gran cantidad de cargas individuales; en estas condiciones se puede aproximar, sin mayor error, un flujo continuo de carga cuyo desplazamiento estaría definido por la tendencia estadística del conjunto.

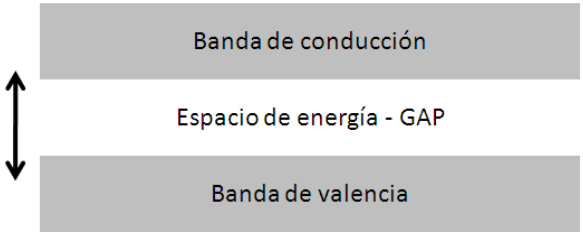
Principios generales

Para que sea posible la aparición de un flujo de corriente eléctrica en un medio material se deben cumplir dos condiciones:

- Existencia de cargas libres.
- Existencia de una fuerza que obligue a estas cargas a fluir en una dirección definida.

Se definen como cargas libres, aquellas que, en la estructura de bandas del modelo atómico de Bohr, se encuentran situadas en un nivel de energía suficientemente alto como para ubicarse

en la denominada banda de conducción y, por lo tanto, pueden fluir a través de la estructura cristalina del material.



La fuerza que impulsa las cargas a moverse en una dirección definida recibe el nombre de fuerza electromotriz o FEM[7] y es necesaria en casi todos los casos de conducción de corriente eléctrica, excepto en el caso de superconductores ideales, en los cuales, a pesar de no aparecer una FEM, las cargas eléctricas conservan el movimiento a lo largo de la estructura del material.

Densidad de portadores libres

La existencia de cargas libres se cuantifica mediante la densidad de portadores de carga eléctrica por unidad de volumen y es representada por la variable $\boldsymbol{\rho_v}$, a la cual se denomina densidad volumétrica de carga libre.

La presencia de dichas cargas está condicionada por múltiples factores que afectan directamente la probabilidad de que un electrón de valencia alcance la energía necesaria para pasar a la banda de conducción, pero los que afectan significativamente dicha probabilidad son la temperatura del medio, el contenido y tipo de impurezas del material, su estructura molecular, la estructura atómica y la ionización del medio.

En otros casos está el bombardeo del material con fotones cuya energía equivalente corresponde a la energía del GAP, que separa la banda de valencia de la banda de conducción, los cuales permiten generar cargas libres que inician el proceso de conducción, como en el caso de los llamados foto-diodos y foto-transistores.

Densidad de portadores según el contenido de impurezas

Los materiales puros, es decir aquellos en los cuales todos los átomos de la red cristalina del material pertenecen al mismo tipo de elemento, difícilmente se encuentran en la naturaleza.

En una red cristalina típica, se tiene un material base o matriz, el cual puede contener átomos de diferentes materiales que lo contaminan, el reduciendo su pureza.

[7] En inglés se utilizan las siglas EMF por Electromotive Force.

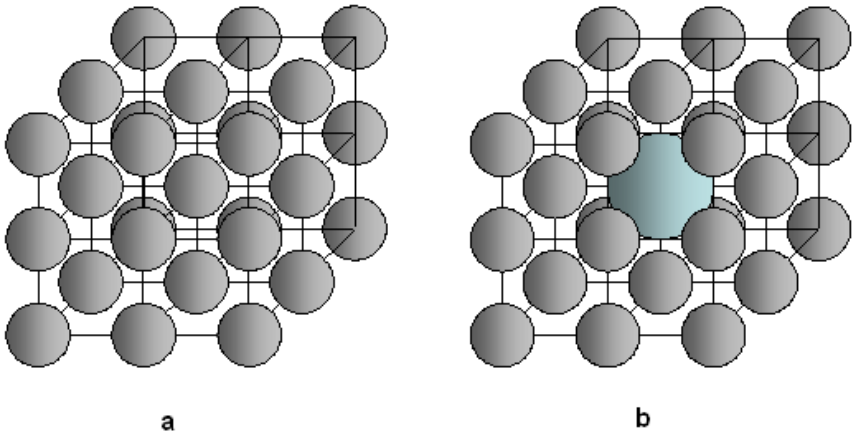


Figura 41. Estructura cristalina cúbica para un material a) Puro
b) Con un átomo intersticial de impureza

Dependiendo de la naturaleza de las impurezas y de la forma en que éstas se integran a la red cristalina del material base, se puede incrementar o disminuir la densidad de portadores libres y por tanto la capacidad de conducción.

Si las impurezas aportan portadores libres, en mayor número que el material base, la contribución es positiva, mientras que si no lo hacen, el efecto total es negativo.

Densidad de portadores libres según el tipo de enlace atómico.

En un enlace metálico, los electrones se encuentran compartidos por todos los átomos formando una especie de nube que rodea la estructura cristalina, esto incrementa la densidad de portadores "libres" mejorando la capacidad de conducción.

En un enlace covalente por el contrario, los electrones se encuentra compartidos entre parejas de átomos completando el octeto de cada uno; esto hace que sea mucho más difícil liberar los electrones, por tanto, la densidad de portadores libres se reduce considerablemente.

En un enlace iónico, la estructura cristalina está formada por iones positivos y negativos de alta interacción electromagnética, por lo que la dificultad de movimiento es aún mayor que en el enlace covalente.

Densidad de portadores libres según el estado térmico

La distribución por bandas de energía de los átomos que forman la estructura cristalina determina la probabilidad de que los electrones se muevan por agitación térmica a niveles superiores de energía de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli. Esto afecta directamente la densidad de portadores libres aún en estados de agitación térmica.

En los materiales semiconductores, la temperatura absoluta[8] afecta de forma directa la densidad de electrones que pueden llegar a la banda de conducción y comportarse como portadores "libres", en estas condiciones, la temperatura contribuye de forma positiva a la capacidad de conducción del medio.

$$\rho_v = KT^{3/2} e^{-E_{g0}/2kT}$$

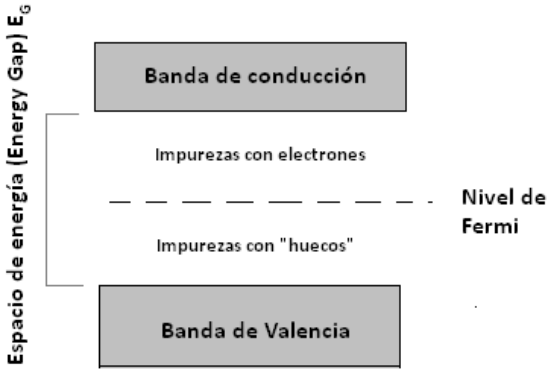


Figura 42. Distribución de bandas de energía en la capa superior de la estructura de un semiconductor

En los materiales conductores no se presenta efecto positivo de la temperatura sobre la densidad de portadores libres de carga.

Movilidad de portadores libres

Cuando las cargas libres se mueven en un medio diferente al vacío, el movimiento es caótico, debido a la alta probabilidad de choques y reabsorciones de los átomos y moléculas del material con los electrones que transportan la corriente eléctrica.

Existen dos factores que afectan la probabilidad de que un portador libre de carga sea capaz de atravesar la red cristalina de un determinado material y que la acción eléctrica transmitida por el se propague con éxito a lo largo del material, dos de estos factores son las deficiencias estructurales del mismo material y su estado térmico.

Movilidad de portadores según la temperatura

En el caso de las temperaturas superiores al cero absoluto, los átomos se encuentran oscilando por agitación térmica en sus propias posiciones, a frecuencias muy altas, en el caso de la temperatura ambiente, los átomos oscilan a una frecuencia media de 10^{13}Hz. Esta oscilación incrementa de forma dramática la probabilidad de interacción lo cual reduce significativamente la movilidad de los portadores de carga libre.

[8] Se refiere a la temperatura medida en grados Kelvin, esta escala tiene como punto cero el -273^0 Celsius y la equivalencia en incremento de temperatura es de un grado Kelvin por grado Celsius..

Como se aprecia en la figura 43, a medida que la amplitud de las oscilaciones aumenta, el tránsito de la onda electrónica se hace más difícil, reduciendo la probabilidad de que los electrones puedan viajar a través de la red y por tanto la capacidad de conducción eléctrica de la misma.

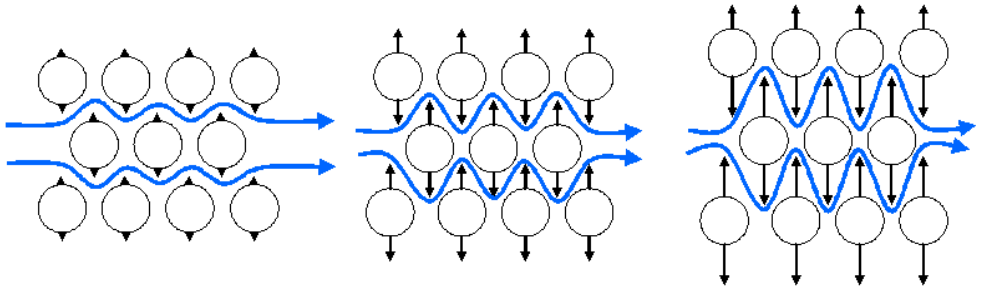


Figura 43. Cambios en el desplazamiento de una onda electrónica debido a un incremento de la amplitud de las oscilaciones de los átomos en la red cristalina de un material en conducción

La temperatura absoluta incrementa la energía interna del material haciendo que la vibración de los átomos en sus posiciones de la red cristalina se incremente aumentando la irregularidad de la red y reduciendo la capacidad de conducción.

Movilidad de portadores según las deficiencias de la estructura del material

La facilidad con la que las cargas se mueven por el medio material está condicionada por la historia del medio físico, representada por el tipo y tamaño de las fisuras en la estructura cristalina, obtenidas de forma natural o a través del procesamiento industrial.

Figura 44. Muestra de material con fisuras creadas por cizallamiento debido a un proceso industrial de estirado

Las fisuras en la red cristalina pueden aparecer por vía natural, mediante la inclusión de átomos intersticiales no conductores o por un procesamiento industrial deficiente que incrementa las fisuras en el material como el martillado o el alambrado sin recocer.[9]

Estas fisuras en la red cristalina, reducen la probabilidad de que la acción eléctrica pueda propagarse con libertad a lo largo de una muestra de material.

[9] Recocido es un proceso mediante el cual, a través de incrementos de temperatura seguidos de enfriamiento, se hace que el material se "diluya" y vuelva a compactarse taponando las grietas dejadas por un proceso anterior, como el estirado por tracción o por martillado, comúnmente usados en la fabricación de alambres conductores.

Densidad de corriente eléctrica

En los materiales conductores, la densidad de cargas libres está representada en su totalidad por la densidad de electrones libres.

En presencia de una fuerza electromotriz externa, asociada a un campo eléctrico aplicado, los electrones tratan de moverse en dirección opuesta al campo a lo largo de la estructura del material impulsados por la fuerza de Coulomb.

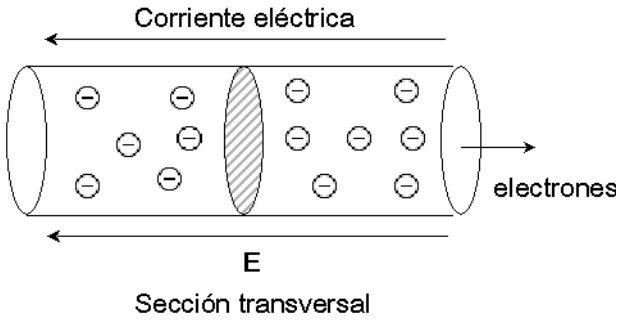


Figura 45. Modelo de la corriente eléctrica en conductores

Por convención, el flujo de corriente eléctrica se define como positivo en el sentido de flujo de las cargas positivas, es decir, en sentido contrario al del movimiento de los electrones.

En medios materiales diferentes al vacío, el movimiento de los portadores de carga no es un movimiento acelerado, a pesar de ser estimulado por una fuerza electromotriz proveniente del campo eléctrico; es un movimiento caótico ocasionado por la interacción de los electrones con el medio a temperaturas superiores al cero absoluto, lo cual hace que los electrones sufran procesos de emisión y absorción de forma permanente, lo cual frena el desplazamiento de la corriente eléctrica.

La tendencia real de los portadores negativos de carga es moverse en dirección contraria al campo a una velocidad media constante denominada velocidad de arrastre. La velocidad de arrastre depende del estado térmico del material, del tamaño de sus moléculas o átomos, del grado de pureza del material y de la intensidad del campo eléctrico aplicado.

Las características intrínsecas del material que determinan la velocidad de arrastre de los portadores de carga, se sintetizan en una variable denominada movilidad y que aparece en la ecuación 27 como μ_ρ.

$$\vec{v}_d = \mu_\rho \vec{E}$$

Ecuación 27. Velocidad de arrastre de portadores de carga

En los materiales semiconductores, a diferencia de los conductores, existen dos tipos diferentes de portadores de carga, los electrones de carga negativa y los huecos de carga positiva.

Las movilidades asociadas son diferentes dependiendo de las dimensiones físicas de los tipos de portadores, igualmente, las densidades volumétricas de carga varían según el dopaje.

Los huecos usualmente tienen una menor movilidad que los electrones, pero este efecto se compensa haciendo un dopaje más denso de huecos, con lo que el aporte de cada tipo de portador a la conductividad total es aproximadamente igual.

La conducción de corriente eléctrica tiene aporte de cada tipo de portador como se observa en la figura 46.

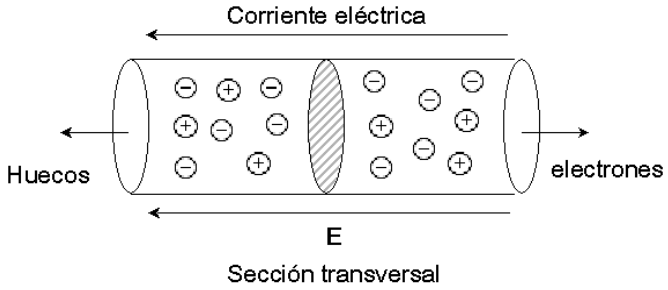


Figura 46. Conducción eléctrica en medios semiconductores

Ejemplo 37. Flujo de electrones a través de un conductor.

Calcule la cantidad de electrones que circulan a través de un alambre de cobre que transporta una corriente de 500mA.

Solución:

El flujo de carga es equivalente a:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{500mCoul}{Seg}$$

La carga eléctrica del electrón es:

$$e = 1{,}602 \times 10^{-19} Coul$$

La corriente por lo tanto es de:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{500mCoul}{Seg} \times \frac{1e}{1.602 \times 10^{-19} Coul} = 312 \times 10^{16} \frac{e}{seg}$$

Conductividad y resistividad eléctrica

Una medida de la circulación de corriente, en cualquier medio, se puede obtener como el producto de la densidad de portadores libres multiplicado por la velocidad de arrastre, tal como se muestra en la figura **47**.

$$\vec{j} = \vec{v}_d \, \rho_v$$

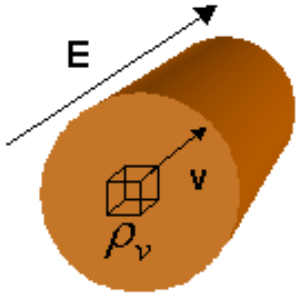


Figura 47. Movimiento de portadores en el interior de un conductor

Dimensionalmente, este producto da como resultado:

$$\vec{j} = \vec{v}_d \, \rho_v = \left({}^{m}\!/_{Seg} \right) \left({}^{Coul}\!/_{m^3} \right) = \left({}^{1}\!/_{m^2} \right) \left({}^{Coul}\!/_{Seg} \right) = \left({}^{Amperio}\!/_{m^2} \right)$$

Ecuación 28. Ecuación dimensional de la densidad de corriente eléctrica

Esto significa que el vector $\vec{j}$ representa la cantidad de corriente eléctrica por unidad de área que atraviesa el conductor en dirección de la velocidad de arrastre.

El producto de la movilidad por la densidad de portadores representa la capacidad de conducir corriente que tiene un material, esta capacidad se denomina conductividad del medio y se simboliza por la letra σ. La conductividad es una característica intrínseca de los medios físicos.

$$\sigma = \rho_v \mu_\rho$$

Ecuación 29. Conductividad en función de la movilidad y la densidad volumétrica de carga

Las unidades SI de la conductividad son los siemens/m; físicamente, la conductividad se interpreta como la facilidad que ofrece un material para establecer en él un flujo de corriente eléctrica. De acuerdo con su conductividad, los materiales se clasifican en conductores, semiconductores y aislantes.

Se puede obtener también una ecuación que relacione directamente la densidad de corriente eléctrica con la intensidad de campo eléctrico y que constituye la formulación diferencial de la llamada Ley de Ohm.

$$\vec{j} = \vec{v}_d \, \rho_v = \mu_\rho \rho_v \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

Ecuación 30. Ley de Ohm en formulación diferencial

En los materiales semiconductores existen movilidades asociadas a los diferentes tipos de portadores y densidades de carga libre asociada a cada tipo de portador, en este caso, la conductividad total del material se define por la ecuación 31.

$$\sigma = \rho_h \mu_h - \rho_{e^-} \mu_{e^-}$$

Ecuación 31. Conductividad en materiales semiconductores

Para este tipo de materiales la Ley de Ohm sigue siendo válida en condiciones de conducción, lo que varía es el cálculo de la conductividad.

El parámetro inverso de la conductividad es la resistividad que se simboliza por ρ. La resistividad representa la oposición que ofrece un medio material a la aparición de una corriente eléctrica. Las unidades SI de la resistividad son los Ohmios – metro.

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

En la tabla 4, se muestra la conductividad de varios materiales y su clasificación según se usan en diferentes aplicaciones de la electrónica.

Tabla 4. Conductividad de materiales, medida a temperatura ambiente de 20°C, y su clasificación

Material	Conductividad (S/m)	Clasificación
Plata	$6.17x10^{7}$	**Conductores**
Cobre	$5.80x10^{7}$	
Oro	$4.2 * 10^{7}$	
Aluminio	$3.82x10^{7}$	
Bronce	$2.56x10^{7}$	
Magnesio	$2.2x10^{7}$	
Tungsteno	$1.83x10^{7}$	
Zinc	$1.6x10^{7}$	
Níquel	$1.45x10^{7}$	
Platino	10^{7}	
Estaño	$8.3x10^{6}$	
Acero	$6\text{-}8 \times 10^{6}$	
Acero Inoxidable	1.4×10^{6}	
Hierro	$1.03x10^{7}$	
Plomo	4.5×10^{6}	
Nicromel	$0.10x10^{7}$	
Mercurio	$1.00x10^{6}$	
Constantan	2×10^{6}	
Grafito	$1x10^{5}$	
Agua de mar	4.00	
Germanio	2.2	**Semiconductores**
Ferrita	$1.00x10^{-2}$	
Silicio	$0.44x10^{-3}$	
Agua destilada	$1.x10^{-4}$	**Aislantes**
Polietileno	$1x10^{-16}$	
Caucho	10^{-15}	
Madera	$10^{-8} - 10^{-10}$	
Papel	10^{-11}	
Parafina	10^{-15}	
Ebonita	$10^{-13} - 10^{-16}$	
Azufre	10^{-14}	
Ámbar	$5*10^{-14}$	
Baquelita	$1.00x10^{-9}$	
Vidrio de ventana	1×10^{-5}	
Vidrio de Boro silicato	$1.00x10^{-12}$	
Porcelana	10^{-12}	
Tierra	10^{-4}	
Cera	10^{-17}	
Mica	$1.00x10^{-15}$	
Cuarzo fundido	$1.00x10^{-17}$	

Relación entre la resistividad y la temperatura

En materiales conductores, la resistividad cambia con la temperatura en grados Celsius de acuerdo con una regla aproximadamente lineal.

Para modelar este fenómeno, existe un coeficiente lineal de variación térmica[10] (α) cuyos valores para diferentes materiales se muestran en la sección de anexos.

$$\rho = \rho_0\left[1 + \alpha\,\Delta T\left({}^0C\right)\right]$$

Ecuación 32. Variación de la resistividad de acuerdo con la temperatura en materiales conductores. Aproximación lineal

Cuando un material incrementa su resistividad a medida que se incrementa la temperatura, se dice que posee un coeficiente de temperatura positivo; cuando la resistividad decrece con la temperatura, el material posee un coeficiente de temperatura negativo, como se aprecia en la figura 48.

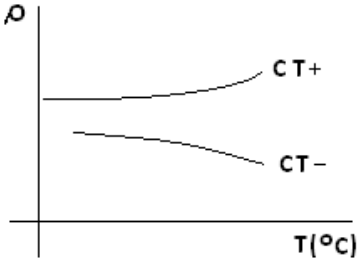


Figura 48. Coeficiente de temperatura positivo y negativo

En materiales semiconductores usados en dispositivos de conmutación como los SCR, Triac y Tiristores, se presentan zonas de operación con coeficiente de temperatura positivo y otras zonas con coeficiente de temperatura negativo.

Este principio de variación de la resistividad con la temperatura se usa en la construcción de dispositivos sensores de temperatura como las RTD.[11]

Tabla 5. Coeficiente de temperatura de varios conductores de uso común

Material	Coeficiente de temperatura α($^oC^{-1}$)
Plata	$3{,}8 \times 10^{-3}$
Cobre	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Aluminio	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$4{,}5 \times 10^{-3}$
Acero	$5{,}0 \times 10^{-3}$
Mercurio	$0{,}9 \times 10^{-3}$
Carbón	$-0{,}5 \times 10^{-3}$
Germanio	$-4{,}8 \times 10^{-2}$

[10] Este coeficiente lineal de variación térmica recibe también el nombre de coeficiente de temperatura.
[11] Detector Resistivo de Temperatura por sus siglas en inglés.

Ejemplo 38. Cálculo de la variación de la resistividad con la temperatura en un conductor de cobre.

Calcule la resistividad del cobre a 50°C dada su conductividad a temperatura ambiente de 20°C.

Solución:

Los valores de conductividad del cobre a temperatura ambiente y del coeficiente de temperatura son respectivamente:

$$\sigma_{Cu} = 5.8\times10^{7}\ {}^{S}\!/_{m} \quad \text{y} \qquad \alpha_{Cu} = 3.9\times10^{-3}\ \left({}^{0}C^{-1}\right)$$

Se usa la ecuación 32 con lo que la resistividad a 50°C queda:

$$\rho = \frac{1}{\sigma_0}\left[1+\alpha\,\Delta T\left({}^{0}C\right)\right] = \frac{1}{5.8\times10^{7}\ {}^{S}\!/_{m}}\left[1+3.9\times10^{-3}\left({}^{0}C^{-1}\right)\left(50^{o}C-20^{o}C\right)\right]$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma_0}\left[1+\alpha\,\Delta T\left({}^{0}C\right)\right] = 1.724\times10^{-7}\,\Omega m\left[1+0.117\right]$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma_0}\left[1+\alpha\,\Delta T\left({}^{0}C\right)\right] = 1.724\times10^{-7}\,\Omega m\left[1.117\right]$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma_0}\left[1+\alpha\,\Delta T\left({}^{0}C\right)\right] = 1.926\times10^{-7}\,\Omega m$$

Como se observa, existe un incremento en la resistividad, por lo tanto se reduce la conductividad.

Intensidad de corriente eléctrica

Cuando se desea calcular la corriente eléctrica total que atraviesa una determinada superficie, se puede hacer uso del Cálculo Integral para totalizar los aportes de los vectores de densidad de corriente a lo largo de la superficie, según se muestra en la figura 49 y se calcula en la ecuación 33.

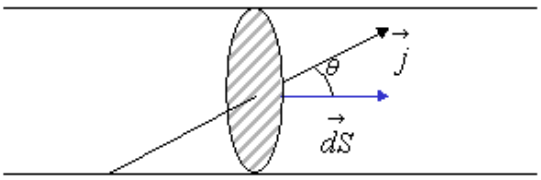


Figura 49. Aporte del vector $\vec{j}$ a la corriente total a través de una superficie

$$I = \int_s \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

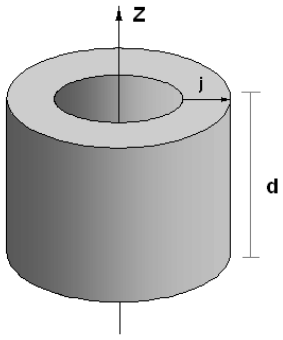
Ecuación 33. Corriente total que atraviesa una superficie

Ejemplo 39. Cálculo de la corriente total que atraviesa una superficie. Validación mediante elementos finitos.

Una densidad de corriente dada por $\vec{j} = \frac{r_1}{\pi r}\vec{a}_r \; kA/m^2$ se mueve en dirección radial desde la pared interna $r = r_1$ hasta la pared externa $r = r_2$ de un cilindro como el que se muestra en la figura.

Las dimensiones físicas del cilindro son: $d = 1m \quad r_1 = 5mm \quad r_2 = 15mm$

Calcule la corriente total que atraviesa la pared del cilindro.



Solución:

Se define un diferencial de superficie paralelo a la pared del cilindro sobre la que se desea calcular la corriente.

En este caso: $\vec{dS} = r\, d\varphi\, dz\, \vec{a}_r$

Se calcula la integral que se define en la ecuación 33:

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r_1}{\pi r} \vec{a}_r \; kA/m^2 \right) \cdot \left(r \, d\varphi \, dz \, \vec{a}_r \right)$$

De donde se obtiene:

$$I = \int_0^d \int_0^{2\pi} \left(\frac{r_1}{\pi} \; kA/m^2 \right) d\varphi \, dz = 2 r_1 d \; kA/m^2 = 2\left(5 \times 10^{-3} m\right)(1m) kA/m^2$$

$$I = 10A$$

Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

Cuando la superficie es cerrada y se calcula la corriente total que sale de la superficie, según se muestra en la figura 50, ésta debe ser igual al negativo de la variación total de carga libre en el volumen encerrado por la superficie, de acuerdo con la ley de conservación de la carga.

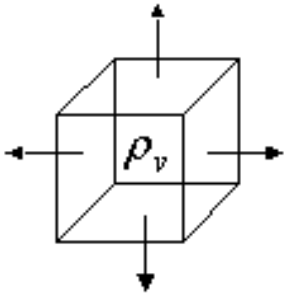


Figura 50. Flujo de salida de corriente a través de una superficie cerrada

De acuerdo con este principio fundamental, surge la ecuación 34, denominada ecuación de continuidad de la corriente.

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho_v dv$$

Ecuación 34. Ecuación de continuidad de la corriente, formulación integral

Cuando se usa el Teorema de la Divergencia se puede obtener una versión diferencial de la ecuación de continuidad.

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_v \rho_v dv = \int_v \nabla \cdot j dv$$

Por tanto:

$$\nabla \cdot j = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

Ecuación 35. Ecuación de continuidad de la corriente, formulación diferencial

Frente al caso de la corriente total que atraviesa una superficie cerrada, se pueden dar dos situaciones claramente diferenciadas:

- Que exista variación de la carga en el volumen encerrado por la superficie; en este caso, la corriente se llama *de convección*.
- Que no exista variación de la carga, caso en el cual la integral se hace nula y la corriente se denomina *de conducción*.

La corriente de convección satisface la ecuación 35, mientras la ley que gobierna el comportamiento de la corriente de conducción está planteada en la ecuación 36, y constituye la formulación diferencial de la Ley de Corrientes de Kirchhoff.

$$\nabla \cdot j = 0 \quad \oint_s \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

Ecuación 36. Ley de Corrientes de Kirchhoff Formulación, diferencial e integral

La diferencia principal entre las corrientes de convección y conducción estriba en su naturaleza transitoria o estable; la corriente de convección aparece de forma transitoria, mientras el material semiconductor o conductor alcanza condiciones estables Electrostáticas por reorganización de la distribución volumétrica de carga; mientras la corriente de conducción es una corriente de estado estable en condiciones electrodinámicas.

Ejemplo 40. Cálculo del tiempo de relajación de un material.

Una carga de 10uC se deposita uniformemente en todo el volumen ocupado por una esfera de cobre de 20mm de radio. Calcule el tiempo necesario para que la densidad de carga migre hacia la superficie de la esfera dejando en el interior una densidad de carga nula en condiciones estáticas.

Recalcule el tiempo, suponiendo que la esfera no es de cobre, sino de polietileno.

Solución:

Se parte de la ecuación 35, porque es evidente que se trata de un problema de variación dinámica de la densidad volumétrica de carga, y de la Ley de Ohm en formulación diferencial, que rigen el comportamiento de la corriente en el interior de diversos medios.

$$\nabla \cdot j = -\frac{d\rho_v}{dt} \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D}$$

Se reemplaza la Ley de Ohm en la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D} \right] = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

Para ninguno de los materiales considerados, la conductividad ni la permitividad son funciones de las coordenadas, por lo que se puede obtener:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla \cdot \vec{D} = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

De la Ley de Gauss se sabe que: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$

Por lo tanto: $$\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

De donde se obtiene la ecuación diferencial homogénea de primer orden:

$$\frac{d\rho_v}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = 0$$

Cuya solución queda definida por:

$$\rho_v(t) = \rho_0 \, e^{-t/\tau} \; ; \; \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Esta exponencial decreciente se estabiliza en un tiempo aproximado de 5τ.

Para el caso del cobre: $\varepsilon = 8.85\times10^{-12}\ F/m$ $\qquad$ $\sigma = 5.8\times10^{7}\ S/m$

Con lo que la constante de tiempo queda:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{8.85\times10^{-12}\ F/m}{5.8\times10^{7}\ S/m} = 1.52\times10^{-19}\,Seg$$

Para el caso del polietileno: $\varepsilon = 2.26\times8.85\times10^{-12}\ F/m$ $\quad$ $\sigma = 10^{-16}\ S/m$

Con lo que la constante de tiempo queda:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{2.26\times8.85\times10^{-12}\ F/m}{10^{-16}\ S/m} = 2\times10^{5}\,Seg \approx 55h\,33\min$$

La expansión de la ecuación 36 da origen a una forma particular de la ecuación de Laplace, aplicable a la corriente de conducción, la cual es de gran utilidad en el cálculo de resistencia eléctrica.

Una forma expandida de la ecuación 36 es:

$$\nabla\cdot J = \nabla\cdot\left(\sigma\vec{E}\right) = -\nabla\cdot\left(\sigma\nabla V\right) = 0$$

$$\nabla\cdot\left(\sigma\nabla V\right) = 0$$

Ecuación 37. Ecuación de Laplace para el flujo de corriente de conducción

Esta es una forma de la ecuación general de Laplace que en forma expandida en Coordenadas Cartesianas quedaría:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_z\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0$$

Ecuación 38. Ecuación de Laplace para la corriente de conducción en Coordenadas Cartesianas

De esta ecuación se puede obtener una forma aún más simple cuando la conductividad no es función de las coordenadas, caso en el cual, se puede sacar de las derivadas parciales para obtener la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Esta ecuación indica que la msma solución obtenida para un problema de Electrostática, se puede usar para resolver un problema de flujo de corriente en condiciones electrodinámicas estables.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera del flujo de corriente eléctrica se pueden deducir a través de las propiedades del campo eléctrico y de las de la corriente de conducción.

De acuerdo con la Ley de corrientes de Kirchhoff se puede hacer un proceso de deducción similar al de las condiciones de frontera Electrostáticas y llegar a un enunciado de las condiciones de frontera de corriente.

Dado que la divergencia de la corriente de conducción es nula, la componente normal de la corriente que atraviesa una superficie de frontera debe ser igual a ambos lados de la frontera, de lo contrario se violaría esta condición.

$$\nabla \cdot J = 0 \quad \Rightarrow \quad j_{n1} - j_{n2} = 0$$

En el caso de presentarse una acumulación temporal de carga en la frontera, se debería utilizar la ecuación de continuidad en términos de la densidad superficial de carga:

$$j_{n1} - j_{n2} = -\frac{d\rho_S}{dt}$$

Para las componentes tangenciales se utiliza la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$\nabla \times E = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\frac{j}{\sigma} \right) = 0$$

Al igual que en el caso de condiciones de frontera Electrostática, eso lleva a que las componentes tangenciales de campo eléctrico deben ser iguales a ambos lados de la frontera, es decir:

$$\nabla \times \left(\frac{j}{\sigma} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{j_{T1}}{\sigma_1} = \frac{j_{T2}}{\sigma_2}$$

Ley de Ohm y cálculo de resistencia

La resistencia eléctrica de una muestra de material se interpreta como la oposición que ofrece la muestra a la circulación de corriente eléctrica, esta oposición depende de características intrínsecas del material como de las dimensiones geométricas de la muestra.

Cuando una muestra de material se somete a una diferencia de potencial, en ella aparece un flujo de corriente eléctrica que se cuantifica según la ecuación 33. La relación entre la diferencia de potencial aplicada y la corriente total, define el valor de la resistencia eléctrica.

$$R = \frac{-\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dL}}{\int_s \vec{j}\cdot\vec{dS}} = \frac{-\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dL}}{\int_s \sigma\vec{E}\cdot\vec{dS}} = \frac{V_{AB}}{I}$$

Ecuación 39. Cálculo de resistencia eléctrica

Para calcular la resistencia eléctrica de una muestra de material se puede proceder de dos formas diferentes: asumir una corriente que circula entre los puntos o superficies equipotenciales entre las que se desea calcular la resistencia eléctrica, y a partir de allí calcular la diferencia de potencial, o asumir una diferencia de potencial y calcular la corriente circulante.

En cualquiera de los dos casos, el cálculo de la resistencia eléctrica se hace usando corriente de conducción, por lo que se debe cumplir en todo momento la Ley de corrientes de Kirchhoff.

En el ejemplo 39, la resistencia eléctrica se podría calcular analíticamente usando la ecuación 39, a partir de la densidad de corriente definida, usando la Ley de Ohm para el cálculo de la intensidad de campo eléctrico. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 41.

Ejemplo 41. Cálculo de la resistencia eléctrica entre las caras cilíndricas de un cilindro hueco.

Dado un cilindro hueco como el del ejemplo 39, calcule la resistencia eléctrica entre las paredes cilíndricas del cilindro hueco.

Las dimensiones físicas del cilindro son: $d = 1m \quad r_1 = 5mm \quad r_2 = 15mm$

Solución:

Se define una corriente I uniforme que circula por el cilindro desde la circunferencia interior hasta la circunferencia exterior.

La densidad de corriente en cada radio del cilindro quedará definida por:

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi r d}\vec{a}_r$$

La intensidad de campo eléctrico según la Ley de Ohm queda definida por:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{j} = \frac{I}{2\pi r d \sigma}\vec{a}_r$$

Se utiliza entonces la ecuación 39 para calcular la resistencia eléctrica.

$$R = \frac{-\int_{r_2}^{r_1} \vec{E}\cdot dr\left(\vec{a}_r\right)}{\int_s \vec{j}\cdot\vec{dS}} = \frac{-\frac{1}{\sigma}\int_{r_2}^{r_1} \vec{j}\cdot dr\left(\vec{a}_r\right)}{\int_0^d\int_0^{2\pi} \vec{j}\cdot\left(r d\varphi\, dz\, \vec{a}_r\right)} = \frac{1}{2\pi d\sigma}\frac{ILn\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{I} = \frac{1}{2\pi d\sigma}Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Para los valores dados se tiene:

$$R = \frac{1}{2\pi(1m)\left(5.8\times10^7\ S/m\right)}Ln\left(\frac{15mm}{5mm}\right) = 3\times10^{-9}\,\Omega$$

Un procedimiento alternativo consiste en definir una diferencia de potencial y resolver la ecuación de Laplace para encontrar el potencial como función de las coordenadas; a partir del potencial, encontrar el campo eléctrico y luego la densidad de corriente por Ley de Ohm. Se usa la ecuación 33 para calcular la corriente total y luego se calcula la resistencia como la relación entre la diferencia de potencial y la corriente.

Este procedimiento se ilustra en la figura 51.

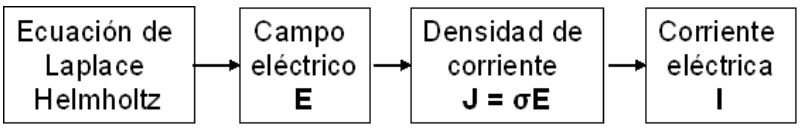


Figura 51. Procedimiento para el cálculo de la resistencia eléctrica, usando la ecuación de Helmholtz – Laplace

Ejemplo 42. Cálculo de la resistencia eléctrica entre las caras cilíndricas de un cilindro hueco, usando la ecuación de Laplace.

Dado un cilindro hueco, como el del ejemplo 39 hecho de cobre, calcule la resistencia eléctrica entre las paredes cilíndricas del cilindro hueco.

Solución:

Se parte de suponer una diferencia de potencial entre las paredes del cilindro hueco.

$$V(r_1) = V_o \qquad V(r_2) = 0$$

En el material de cobre, la conductividad no depende de las coordenadas, por lo que es admisible el uso de la ecuación de Laplace, cuyo componente radial en Coordenadas Cilíndricas está definido por:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

La solución de esta ecuación se hace por doble integración de la siguiente forma:

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = k_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k_1}{r} \quad \Rightarrow \quad V(r) = k_1 Ln(r) + k_2$$

Se aplican condiciones de frontera:

$$V(r_1) = k_1 Ln(r_1) + k_2 = V_0$$

$$V(r_2) = k_1 Ln(r_2) + k_2 = 0$$

De este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene:

$$k_1\left[Ln(r_1) - Ln(r_2)\right] = V_0$$

$$k_1 = \frac{V_0}{\left[Ln(r_1) - Ln(r_2)\right]} = \frac{V_0}{Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

El campo eléctrico se calcula como el gradiente negativo del potencial:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r = -\frac{k_1}{r}\vec{a}_r = -\frac{V_0}{rLn\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\vec{a}_r = \frac{V_0}{rLn\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\vec{a}_r$$

La densidad de corriente eléctrica se calcula con la Ley de Ohm:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma V_0}{r Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \vec{a}_r$$

Se usa la ecuación 33 con $\vec{dS} = r\, d\varphi\, dz\, \vec{a}_r$

$$I = \int_0^d \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sigma V_0}{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right) d\varphi\, dz = \frac{2\pi\, d\sigma V_0}{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

La relación entre la diferencia de potencial y la corriente es la resistencia eléctrica:

$$\frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi\, d\sigma} Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Que es un resultado idéntico al obtenido en el ejemplo 41.

Potencia eléctrica y efecto Joule

Cuando ocurre un desplazamiento de carga a través de un campo eléctrico, necesariamente se presenta un intercambio de energía eléctrica, debido a la ganancia o pérdida de energía potencial eléctrica experimentada por la carga.

Cuando la carga positiva se desplaza en el sentido del campo eléctrico, ocurre una pérdida de energía potencial eléctrica por parte de la carga; esta energía por ley de conservación de la energía no puede desaparecer, sino que es cedida al medio, el cual a su vez la disipa en forma de calor, según descubrió James Prescott Joule, en 1840.[12]

Para hacer una aproximación diferencial al comportamiento del intercambio de energía, se puede partir de la noción de diferencia de potencial eléctrico.

Cuando una densidad volumétrica de carga ρ_V se desplaza en dirección de un campo eléctrico E, experimenta una pérdida de energía potencial eléctrica cuya magnitud será igual al negativo de la diferencia de potencial multiplicado por la carga en movimiento.

[12] En 1840, Joule publicó *Producción de calor por la electricidad voltaica*, estableciendo la ley que lleva su nombre, en donde afirma que el calor originado en un conductor por el paso de la corriente eléctrica es proporcional al producto de la resistencia del conductor por el cuadrado de la intensidad de corriente.

$$dW_e = -\Delta V(\rho_V dv)$$

El diferencial total de la función potencial viene dado por:

$$\Delta V = \nabla V \cdot \vec{dl}$$

De donde se obtiene que la energía disipada por unidad de volumen es igual a:

$$\frac{dW_e}{dv} = -\nabla V \cdot \vec{dl}(\rho_V)$$

Pero el negativo del gradiente de potencial es igual a la intensidad de campo eléctrico, por lo tanto:

$$\frac{dW_e}{dv} = \vec{E} \cdot \vec{dX}(\rho_V)$$

Esta energía se puede derivar en el tiempo para obtener la potencia disipada por unidad de volumen, en cuyo caso se obtiene:

$$\frac{dp_e}{dv} = \vec{E} \cdot \left(\frac{\vec{dX}}{dt}(\rho_V) \right)$$

Pero a su vez, la derivada temporal del vector desplazamiento es la velocidad de arrastre de la carga.

$$\frac{dp_e}{dv} = \vec{E} \cdot \left(\rho_V \vec{v}_\rho \right)$$

El producto de la velocidad de arrastre por la densidad volumétrica de carga es la densidad de corriente eléctrica, por lo que se obtiene:

$$\frac{dp_e}{dv} = \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot$$

Ecuación 40. Potencia por unidad de volumen disipada en un medio en el que se desplaza una carga eléctrica

La ecuación 40 representa la potencia disipada por unidad de volumen en un medio cualquiera en el que se presente conducción de corriente eléctrica, esta potencia integrada sobre todo el volumen e integrada en el tiempo, permite cuantificar la energía disipada.

La disipación de energía en forma de calor por la corriente de conducción se denomina efecto Joule, en honor a su descubridor.

Ejemplo 43. Potencia total disipada en un material conductor

Una esfera hueca de material conductor posee una conductividad de $5x10^7$ Siemens/m. La esfera tiene un diámetro interno de 20cm y un radio externo de 1m, y transporta una corriente de $\vec{j} = 10^3 \, A/m^2 \, \vec{a}_R$. Calcule la potencia total disipada por la esfera.

Solución:

Se utiliza la ecuación 30 para calcular el campo eléctrico asociado a la corriente de conducción.

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j}$$

Ahora se usa la ecuación 40 para calcular la potencia por unidad de volumen

$$\frac{dp_e}{dv} = \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot = \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\sigma} |j|^2$$

Para calcular la potencia total, se integra sobre todo el volumen.

$$P = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{0.2}^{1} \frac{1}{\sigma} |j|^2 R^2 Sen\theta \, dR \, d\varphi \, d\theta = \frac{2}{3\sigma} R^3 |j|^2 \Big|_{R=0.2}^{R=1} = 13.22 \, mW$$

Ejercicios del capítulo

1. Se ha observado que la sección normal de un tubo fluorescente de 3.0 cm. de diámetro es atravesada cada segundo por $2.0x10^{18}$ electrones y por $0.5x10^{18}$ iones positivos (ionizados por la pérdida de un electrón). ¿Cuál es la densidad de la corriente eléctrica que circula por el tubo?

2. La intensidad de la corriente que atraviesa un hilo conductor viene dada, en función del tiempo, por la siguiente expresión: $i = 3t^2 + 2$, donde, i está expresada en amperios y t en segundos.

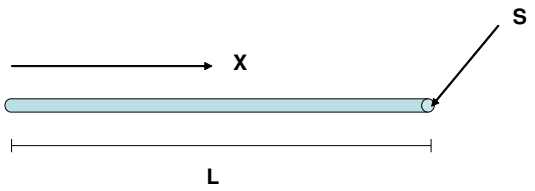
¿Cuántos electrones atraviesan una sección normal del hilo en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = [1,5]$?
¿Cuál es la intensidad media de la corriente en dicho intervalo?

3. Un hilo conductor de 6Ω de resistencia se funde para construir otro hilo conductor cuya longitud es el triple de la del hilo original. Calcule la resistencia del nuevo hilo suponiendo que permanecen inalterados los valores de la resistividad y la densidad del material.

4. Considere un hilo conductor de cobre AWG 16 de 10 metros de largo que transporta una corriente de 6A y calcule:

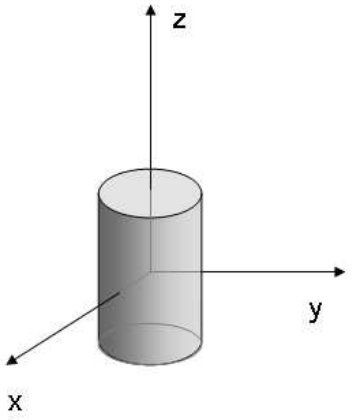
- La densidad de corriente y el campo eléctrico en el interior del conductor.
- La diferencia de potencial que se presenta en sus extremos.
- La potencia que se disipa en el conductor en la situación anterior.

5. Un conductor cilíndrico de sección transversal S y longitud L está hecho de un material cuya resistividad viene dada por: $\rho(x) = \rho_0 + ax + bx^2$. Donde x es la distancia medida desde el inicio del conductor. ¿Cuál es la resistencia eléctrica total del alambre?



6. En una región en la cual la permitividad eléctrica es igual a la del vacío, la densidad de corriente de convección se encuentra definida por la ecuación: $j = Re^{-2t}\overrightarrow{a_R}$

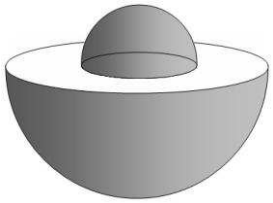
Calcule la corriente total que abandona un cilindro de radio unitario cuyo eje coincide con el eje z y que se extiende desde: $Z = [-\pi, \pi]$
Calcule la densidad volumétrica de carga $\rho_v(t)$ en la región, suponiendo que $\lim_{t\to\infty} \rho_v = 0$
Calcule la conductividad del medio.



7. Un sistema formado por una esfera de radio $R = 10cm$ y un casquete semiesférico de radio $R = 1m$ perfectamente conductores como se muestra en la figura, se encuentra sometido a una diferencia de potencial de 100V.

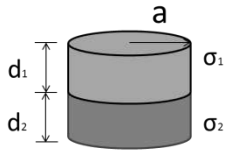
Desde la esfera interior hacia la exterior, fluye una corriente de 10A

Calcule la conductividad del material, la intensidad de campo eléctrico y la densidad volumétrica de potencia en la región delimitada por las capas conductoras.



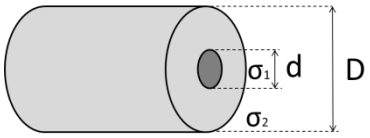
8. Un diodo de potencia se forma con dos capas de material con diferente dopaje y conductividad, según se muestra en la figura.

Si cada capa tiene forma circular, una conductividad y un espesor diferente, pero el mismo radio. Calcule la resistencia total del diodo entre las dos caras circulares. Calcule la potencia disipada por el diodo cuando transporta una corriente de 50A y si las capas son de conductividades 10^5 y $3x10^5$ Sm/m; a=d1=d2=3mm.



9. Una forma común de construir conductores para líneas aéreas se basa en revestir un conductor interno de alta resistencia mecánica como el acero con una capa externa de un material más blando, pero de mayor conductividad, como el aluminio. Así se reduce la flexibilidad del conductor pero se obtiene una buena capacidad para conducir corriente eléctrica.

En el conductor que se muestra en la figura, ¿cuál debe ser la relación D/d para que el 90% de la corriente circule por la sección de aluminio y apenas el 10% por la parte de acero? ¿Cuál sería la relación si se deseara un porcentaje de conducción de 95% - 5%?



Respuestas a los ejercicios

1. 566 A/m².
2. $82.4 \times 10^{19} e$ 33A
3. $R = 54\Omega$
4. $j = 1.15 \times 10^6 \, {}^{A}/_{m^2}$ $E = 19.7 \, {}^{mV}/_{m}$ $V_{AB} = 197mV$ $P = 1.18W$

5. $R = \frac{1}{S}\left(\rho_0 L + \frac{1}{2}aL^2 + \frac{1}{3}bL^3\right)$

6. $I = 6\pi^2 e^{-2t} \quad \rho_v(t) = \rho_0 e^{-2t} \quad \sigma = 2\varepsilon_0$

7. $\sigma = \frac{9}{20\pi}\ Sm/_m \vec{E} = \frac{100}{9R^2}\overrightarrow{a_R} \quad \frac{dp}{dv} = \frac{1}{18\pi R^4}\ kW/_{m^3}$

8. $R = \frac{1}{\pi a^2}\left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}\right) \quad P = 3.53W$

9. $\frac{D}{d} = 1.63\ \ Caso\ 90-10 \quad \frac{D}{d} = 2.13\ \ Caso\ 95-5$

Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para principios generales, conductores y propiedades de los conductores:

Reitz, John D., Milford, Frederick J., Christy, Robert W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Cuarta edición. México: Addison Wesley, 1996. Páginas 162-181. ISBN 968-444-403-6.

Hayt, William H. Buck, John A. *Teoría Electromagnética*. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 93-107. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para intensidad de corriente eléctrica, ecuación de continuidad, condiciones de frontera y cálculos de resistencia:

Cheng, David K. *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Primera edición. Argentina: Addison Wesley Iberoamericana, 1997. Páginas 151-169. ISBN 0-201-65375-3.

Capítulo 5

Magnetostática

Introducción

En 1820, Oersted[13] dio a conocer su descubrimiento de que la corriente eléctrica produce efectos magnéticos, observando cómo el paso de una corriente eléctrica hace desviarse a una aguja imantada. Estos resultados, acerca de la relación entre el movimiento de carga eléctrica y su influencia sobre los campos magnéticos, dieron origen a lo que hoy conocemos como Teoría Electromagnética.

Faraday logró detectar, por primera vez, corrientes inducidas, el 29 de agosto de 1831, empleando un anillo de hierro con dos bobinados denominados primario y secundario. En el momento de establecer e interrumpir el contacto del circuito primario con la batería eran apreciables breves corrientes en el secundario.

En el presente capítulo, se tratarán los íconos más importantes en el modelo clásico del comportamiento de campo magnético en condiciones estáticas, es decir, cuando las fuentes de campo magnético no varían en el tiempo.

Se analizan también las fuentes de campo magnético, las características del medio que favorecen o desfavorecen la creación de campos magnéticos y se plantea un modelo matemático para calcular la intensidad de campo magnético y la densidad de flujo magnético en diferentes medios.

Finalmente, se hace un análisis de los diferentes fenómenos que afectan la inductancia en distintos medios y se explica el proceso mediante el cual se puede calcular la inductancia en circuitos lineales y no lineales. Se hace también una amplia discusión sobre la permeabilidad magnética en medios físicos y la clasificación de materiales según su permeabilidad.

Fuentes del campo magnético

Las primeras referencias de observación de fenómenos relacionadas con el magnetismo datan del siglo III A.C. Diógenes Laercio cita un comentario de Aristóteles (384-322 A.C.), donde se refiere:

> "Tales de Mileto le atribuye vida aún a lo inanimado cuando discute acerca del comportamiento del ámbar y de la piedra imán o magnetita, muy abundante en la región de Magnesia que queda al este de Tesalia".

[13] Hans Crhistian Oersted (1777-1851). Químico y físico danés, descubridor de la relación entre electricidad y el magnetismo.

La piedra imán o magnetita era la única fuente de magnetismo natural conocida hasta la Edad Media y solamente hasta el desarrollo de los experimentos de Oersted, en 1819, se identifica la corriente eléctrica como fuente de campo magnético. De esta forma, se encuentran dos tipos diferentes de imanes: los naturales, construidos a partir de piedra imán o magnetita, y los artificiales, generados por corrientes eléctricas o por imantación.

Los imanes que no son generados a través de corriente eléctrica reciben también el nombre de imanes permanentes.

Las Líneas de Fuerza del campo magnético, establecido alrededor de un imán, abandonan el polo norte e ingresan por el polo sur del mismo imán, como se muestra en la figura 52.

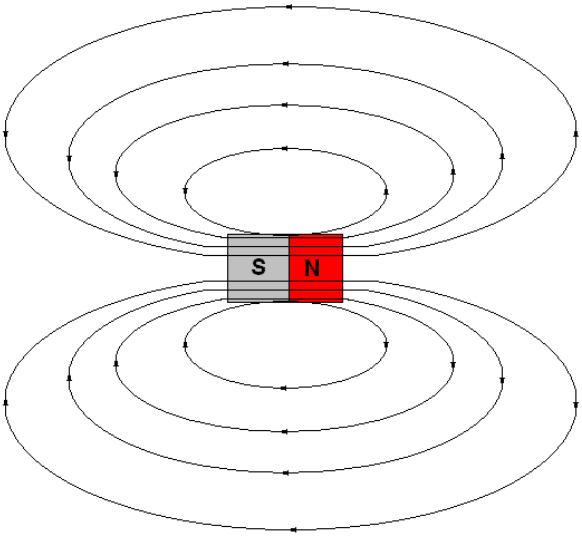


Figura 52. Líneas de Fuerza alrededor de un imán permanente

Una característica importante que diferencia al campo magnético del campo eléctrico, es el hecho de que para el campo magnético no existen cuerpos opacos, es decir, todos los materiales se dejan atravesar por el campo magnético, salvo en condiciones especiales de superconducción, en donde se genera una anulación del campo magnético al interior de materiales cerámicos superconductores, denominada efecto Meissner.

Ley de Coulomb para fuerzas magnéticas

Las fuerzas de naturaleza magnética son atractivas entre polos de diferente naturaleza y repulsivas entre polos de igual naturaleza. Hacia 1780, Charles Auguste Coulomb formuló una ley de comportamiento de las fuerzas magnéticas.

Usando lo que llamó unidades de masa magnética, planteó una ley experimental de variación de la fuerza magnética con el inverso del cuadrado de la distancia.

Las unidades de masa magnética miden la capacidad de un imán de atraer o repeler otros imanes; entre más poderoso sea el imán, mayor número de unidades de masa magnética se le

asocian. Los polos norte se suponen con masa magnética positiva y los polos sur con masa magnética negativa.

Al igual que en todos los campos, considerados con anterioridad, el número de líneas de fuerza que representan un campo magnético es proporcional a las unidades de masa magnética que lo crean.

La fuerza de repulsión entre dos polos magnéticos es directamente proporcional al producto de su masa magnética e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

$$F = k_m \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Ecuación 41. Fuerza de repulsión entre dos polos en función de su masa magnética

La constante de proporcionalidad k_m depende del sistema de unidades y del medio entre los polos, en el sistema CGS esta constante es 1, pero en SI es 10^7.

La unidad de masa magnética base en el sistema CGS es el Maxwell, y es aquella que ubicada en el vacío a una distancia de 1cm produce una repulsión de 1dina. En el **SI** se utiliza otra unidad de masa magnética denominada Weber, y se define como la cantidad de masa magnética que ubicada a una distancia de 1m produce una repulsión de 10^7Newton. La relación entre las dos unidades viene dada por la expresión:

$$1Wb = 10^8 Mx$$

Ejemplo 44. Cálculo de la fuerza de repulsión entre dos polos magnéticos en el vacío.

Calcule la fuerza de repulsión entre dos polos norte de 4Wb y -6Wb, respectivamente, que se encuentran a 50cm. de distancia en el vacío.

Solución:

La fuerza de repulsión queda definida por la ecuación 41.

$$F = k_m \frac{m_1 m_2}{d^2} = 10^7 \frac{(4Wb)(-6Wb)}{(0.5m)^2} = 9.6 \times 10^8 N$$

Como se puede apreciar por los resultados del ejemplo 44, el Weber es una unidad de masa magnética grande, por lo cual es más común usar sus submúltiplos, miliWeber, microWeber, etc.

Ejemplo 45. Cambio de unidades de masa magnética.

Un polo magnético tiene una masa magnética equivalente de 400mWb. ¿A cuántos Maxwell equivale dicha masa?

Solución:

Se utiliza la conversión de unidades:

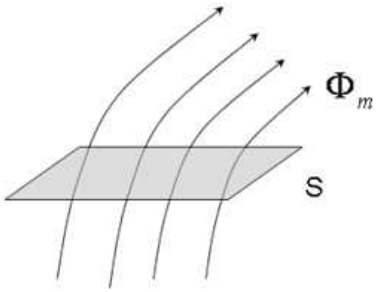
$$m_m = 400mWb = 0.4Wb$$

$$m_m = 0.4Wb \times \frac{10^8 Mx}{1Wb} = 40MMx$$

La masa equivale a 40Mega Maxwell.

Flujo y densidad de flujo magnético

Al igual que en el caso del campo eléctrico, existe una cantidad llamada flujo magnético que representa la cantidad de líneas de campo magnético que atraviesa una superficie determinada.



La cantidad de líneas de flujo es proporcional a la masa magnética que origina el campo, esto significa que el flujo magnético se mide en las mismas unidades de masa magnética, es decir, en Maxwell o Weber.

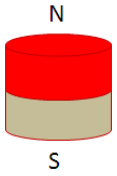
Para medir el flujo magnético se usa el vector de densidad de flujo magnético o inducción magnética que se simboliza por **B**.

El vector de densidad de flujo magnético es la cantidad de Líneas de Fuerza por unidad de área, por lo tanto, sus unidades se derivan de una unidad de masa magnética sobre la unidad correspondiente de área.

En el sistema CGS se utiliza el Gauss, equivalente a una inducción de 1 Maxwell por centímetro cuadrado, mientras en el SI se usa el Tesla, correspondiente a 1 Weber por metro cuadrado. La equivalencia de unidades es de 1Tesla = 10^4 Gauss.

Ejemplo 46. Densidad de flujo magnético.

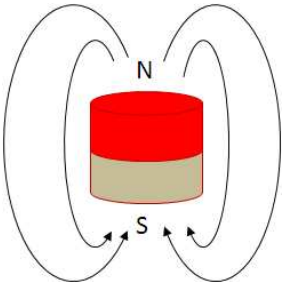
Un imán permanente tiene una masa magnética equivalente de 100uWb. El imán tiene una sección cilíndrica (igual a los imanes de los parlantes de los equipos de sonido), con un diámetro de 1.5cm.



¿Cuál es la densidad de flujo en las caras circulares del imán en Tesla y en Gausses?

Solución:

Si se asume que la totalidad de Líneas de Fuerza abandonan el imán por la cara circular de los polos y que la distribución de Líneas de Fuerza es uniforme, se puede calcular la densidad de flujo como:



$$B_m = \frac{100\mu Wb}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

Reemplazando:

$$B_m = \frac{100\mu Wb}{\pi\left(\frac{1.5\times 10^{-2}m}{2}\right)^2} = 0.56\frac{Wb}{m^2} = 0.56T$$

Pasando a Gausses:

$$B_m = 0.56T \times \frac{10^4 Gauss}{1T} = 5600Gauss$$

El flujo magnético total que atraviesa una superficie determinada en función de la densidad de flujo, cuando esta no es uniforme es necesario calcularla usando la ecuación:

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Una propiedad especial que tiene el campo magnético es que las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas; de modo que cuando se evalúa la integral del flujo sobre una superficie cerrada, el resultado es nulo.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia al campo magnético, se llega a una ecuación que es la versión diferencial de la Ley de Gauss; la cual es válida para campos magnéticos invariantes en el tiempo.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Intensidad de campo magnético

La intensidad de campo magnético H se define como la fuerza de repulsión magnética por unidad de masa magnética. La intensidad de campo entonces depende de la masa magnética fuente de la fuerza y de la distancia a ella.

$$H = \frac{F}{m_2} = k_m \frac{m_1}{d^2}$$

Ecuación 42. Intensidad de campo magnético en función de la masa magnética y la distancia

La unidad de medida de la intensidad de campo magnético en el sistema CGS es el Oersted, y es la intensidad de campo magnético que produce una fuerza de una dina sobre una unidad de masa magnética de 1 Maxwell.

$$1\ Oersted = 1\ {}^{dina}/_{Maxwell}$$

En el **SI** se utiliza una unidad basada en la Ley de Ampere, esta unidad expresa la intensidad de campo magnético en unidades de corriente eléctrica sobre unidad de longitud.

Se mide la intensidad de campo magnético en ${}^{Amperio \times Vuelta}/_{metro}$

La equivalencia de las unidades está definida por:

$$1\ Oersted = 79.6\ {}^{Amperio \times Vuelta}/_{metro}$$

Ley de Biot-Savart

La Ley de Biot-Savart, enunciada en 1820, permite cuantificar la intensidad de campo magnético, creada por una corriente eléctrica en función de la intensidad de la corriente eléctrica y la distancia.

De acuerdo con esta Ley, la intensidad de campo magnético es directamente proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica que lo crea e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia con respecto al filamento de corriente.

La dirección del campo magnético se encuentra, por el producto vectorial de un vector tangencial a la dirección del filamento de corriente y un vector radial que apunta desde la posición del filamento hasta el punto en el cual se calcula la intensidad del campo magnético, según se muestra en la figura 53.

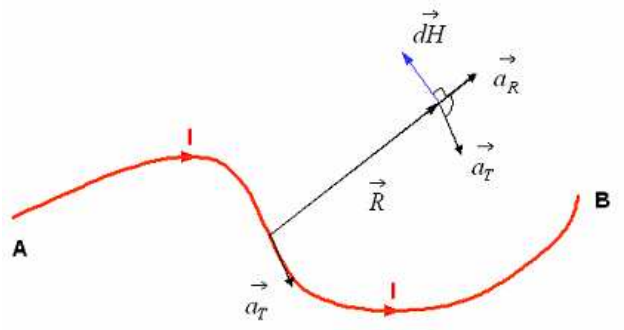


Figura 53. Ilustración de la Ley de Biot-Savart

La intensidad de campo magnético queda definida por la ecuación 43 en forma diferencial y por la ecuación 44 en forma integral.

En donde:

I Es la intensidad de corriente eléctrica en amperios.

dl Es el diferencial escalar de longitud del filamento de corriente.

$\vec{a}_T$ Es un vector unitario tangencial a la trayectoria del filamento de corriente.

$\vec{a}_R$ Es un vector unitario dirigido desde el filamento de corriente hasta el punto en donde se va a calcular el campo magnético.

R Es la distancia medida desde el filamento hasta el punto en donde se va a calcular el campo magnético.

$$\vec{dH} = \frac{I\left(dl\,\vec{a_T}\right)\times\left(\vec{a_R}\right)}{4\pi R^2}$$

Ecuación 43. Formulación diferencial de la Ley de Biot–Savart

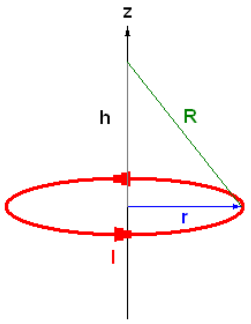
$$\vec{H} = \int_A^B \frac{I}{4\pi R^2}\vec{a_T}\times\vec{a_R}\,dl = \frac{I}{4\pi}\int_A^B \frac{\vec{a_T}\times\vec{a_R}}{R^2}dl$$

Ecuación 44. Formulación integral de la Ley de Biot–Savart

Existen distribuciones de corriente típicas que sirven como base para calcular el campo magnético en otros casos, por ejemplo:

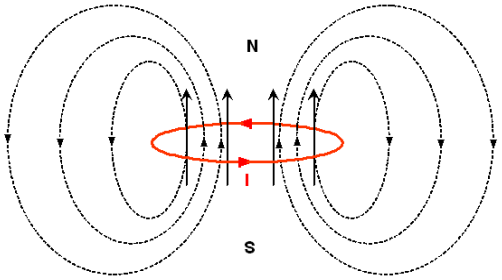
Campo magnético de una espira circular de corriente

La intensidad de campo magnético en un punto situado sobre el eje z, a una altura h, sobre una espira circular con centro en el origen de coordenadas y radio r por la que circula una corriente **I,** está definida por:



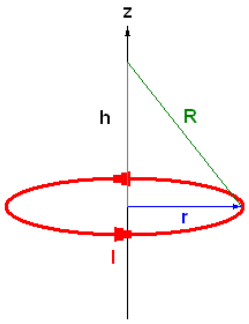
$$H = \frac{Ir^2}{2(r^2+h^2)^{3/2}}\,\overrightarrow{a_z}$$

Las Líneas de Fuerza del campo magnético siguen las trayectorias mostradas en la figura:



Ejemplo 47. Campo magnético de una espira de corriente.

Una espira con un diámetro de 5cm, transporta una corriente de 10A en dirección φ, como lo muestra la figura.



Calcule la intensidad de campo magnético en Oersted y Ampere/metro en: el centro de la espira. En un punto situado 3cm. por encima del eje de la espira.

Solución:

Se retoma la ecuación del campo magnético de la espira:

$$H = \frac{Ir^2}{2(r^2 + h^2)^{3/2}}\,\overrightarrow{a_z}$$

En el centro de la espira h=0:

$$H = \frac{I}{2r}\,\overrightarrow{a_z}$$

$$H = \frac{10A}{2\left(\frac{5\times 10^{-2}m}{2}\right)}\,\overrightarrow{a_z} = 200\,\overrightarrow{a_z}\ \ {Amp}/{m}$$

Pasando el valor a Oersted:

$$H = 200\,\overrightarrow{a_z}\ \ {Amp}/{m} \times \frac{1Oersted}{79.6A/m} = 2.51\,Ost\,\overrightarrow{a_z}$$

Si se repite el cálculo para el punto situado a 3cm por encima de la espira el resultado es:

$$H = \frac{10A \times (5\times 10^{-2}m)^2}{2[(5\times 10^{-2}m)^2 + (3\times 10^{-2}m)^2]^{3/2}}\,\overrightarrow{a_z}$$

$$H = \frac{10A \times 25\times 10^{-4}m^2}{2[34\times 10^{-4}m^2]^{3/2}}\,\overrightarrow{a_z}$$

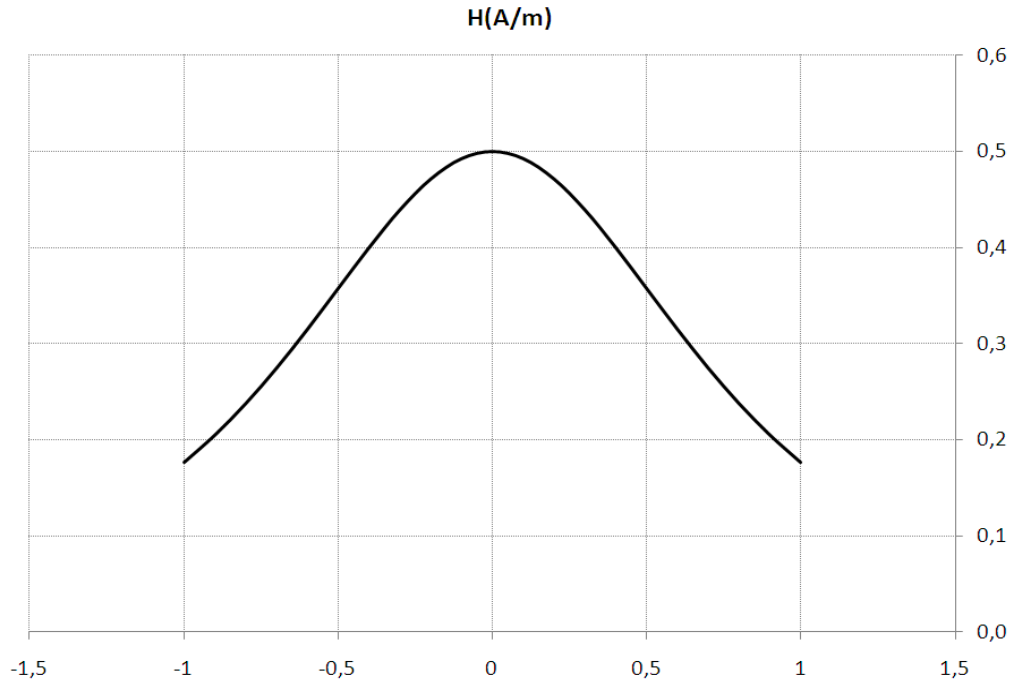
$$H = \frac{250 \times 10^{-4} A \times m^2}{396.5 \times 10^{-6} m^3} \overrightarrow{a_z}$$

$$H = 63 A/m \, \overrightarrow{a_z}$$

Se reduce aproximadamente a la tercera parte.

$$H = 63 \, \overrightarrow{a_z} \; {Amp}/{m} \times \frac{1 Oersted}{79.6 A/m} = 0.79 \, Ost \, \overrightarrow{a_z}$$

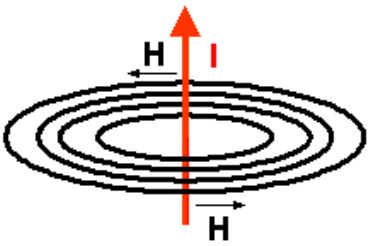
Cuando se utiliza una espira de radio unitario que transporta una corriente igualmente unitaria, y se hace un gráfico de la variación de la intensidad del campo magnético a lo largo del eje de la espira en función de la distancia al centro de la espira se obtiene:



En la figura se observa cómo la intensidad del campo magnético decae rápidamente a medida que el observador se aleja del centro de la espira, aun cuando se encuentre ubicado sobre el eje de la misma.

Campo magnético de una línea infinita de corriente

El campo producido por una línea infinita que transporta una corriente **I** en dirección del eje z, sobre un punto situado a una distancia r del eje de la línea en cualquier ángulo φ, se encuentra definido por:

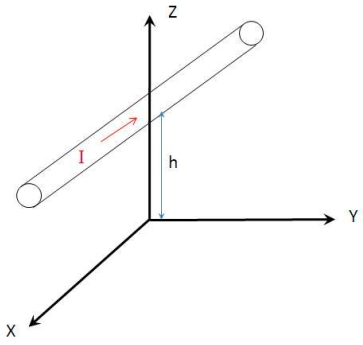


$$H = \frac{I}{2\pi r}\,\overrightarrow{a_\varphi}$$

Ejemplo 48. Campo magnético de una línea de corriente.

Calcule la máxima intensidad de campo magnético que se presenta bajo una línea de transmisión de 600A, que pasa sobre el suelo a una altura h=6m, justo sobre el eje x, tal como se muestra en la figura.

Calcule la distancia Y a la que debe encontrarse una persona de la línea para que la intensidad del campo magnético se reduzca a la tercera parte de la intensidad máxima.



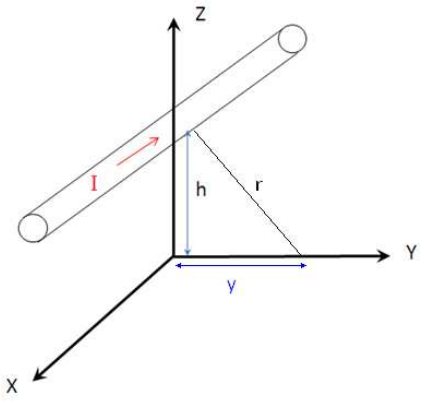
Solución:

El caso de una línea de transmisión de longitud muy larga se puede asumir como el caso de una línea infinita, dado que la distancia del observador con respecto a la línea es despreciable frente a la longitud física de la misma.

En este caso se puede aproximar la intensidad de campo magnético por medio de la ecuación:

$$H = \frac{I}{2\pi r}\,\overrightarrow{a_\varphi}$$

Dado que r es la distancia que existe entre el observador y la línea, el valor de r se puede aproximar en términos de la altura de la línea y la distancia del observador sobre el eje y, como se ilustra en la figura:



$$r = \sqrt{h^2 + y^2}$$

Con lo que la ecuación del campo magnético queda:

$$H = \frac{I}{2\pi\sqrt{h^2 + y^2}}\,\overrightarrow{a_\varphi}$$

La máxima intensidad de campo magnético se alcanzará cuando se tenga la mínima distancia a la línea, según la Ley de Biot-Savart, y esto ocurre en y=0; por lo tanto:

$$H_{MAX} = \frac{I}{2\pi h}$$

Para este caso:

$$H_{MAX} = \frac{600A}{2\pi \times 6m} = 15.9\ A/m$$

Cuando se quiere calcular la distancia a la que el campo se reduce a la tercera parte basa ton, igualar la ecuación a la tercera parte del campo máximo:

$$\frac{I}{2\pi\sqrt{h^2 + y^2}} = \frac{1}{3} \times \frac{I}{2\pi h}$$

Despejando Y:

$$3h = \sqrt{h^2 + y^2}$$

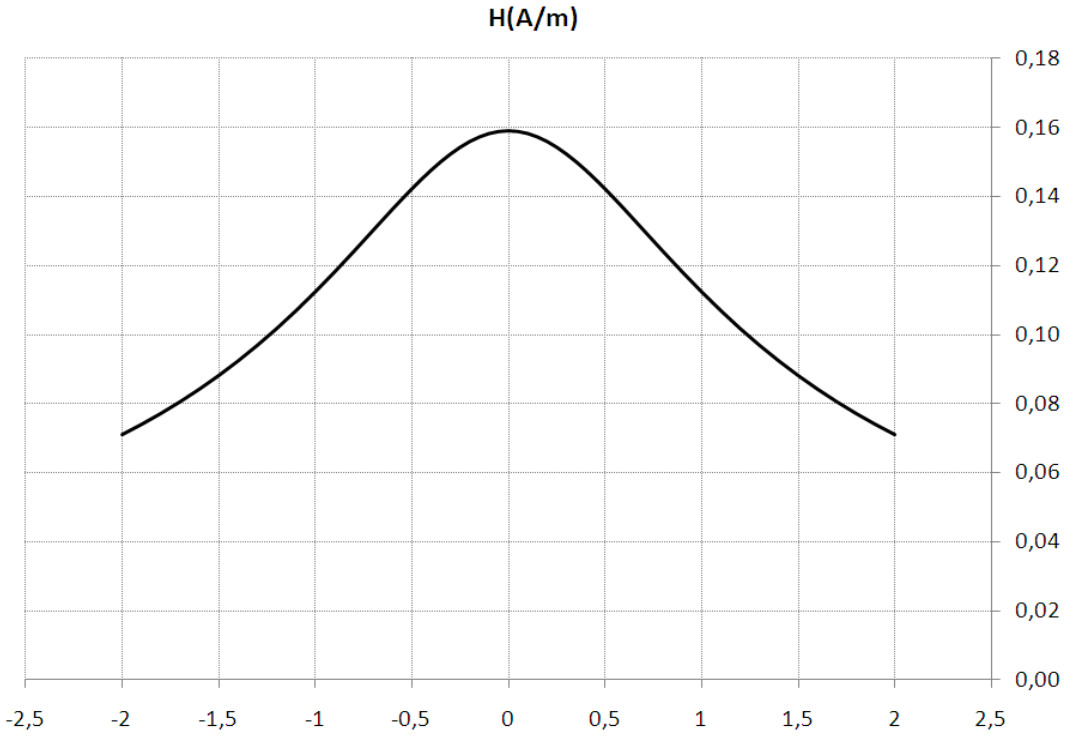
$$9h^2 = h^2 + y^2$$

Por lo tanto:

$$y = \pm h\sqrt{8} = \pm 17m$$

Se obtienen dos puntos, dado que en este caso la magnitud del campo es simétrica con respecto al eje y.

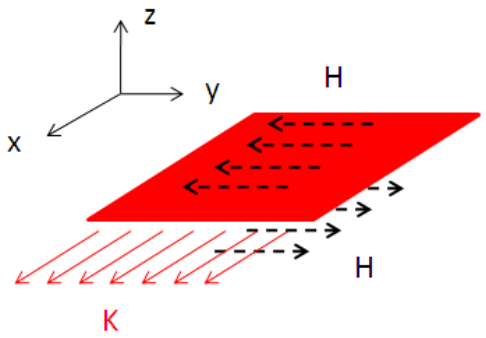
Para el caso de la línea infinita, considerada en el ejemplo, si se tiene una línea de transmisión que transporta una corriente unitaria, y se encuentra a una altura unitaria sobre el plano XY en la misma dirección del eje X; y se calcula la intensidad del campo magnético en función del desplazamiento en Y, se obtiene un gráfico como el de la figura:



Como se puede apreciar, la magnitud del campo máximo es menor a la del caso de la espira, pero el decrecimiento del mismo con respecto a la distancia es también menor.

Campo magnético de una placa infinita de corriente

El campo producido por una placa infinita que transporta una corriente **I** en dirección del eje x, sobre un punto situado a una altura h del plano de la placa en cualquier punto (x,y), se encuentra definido por:

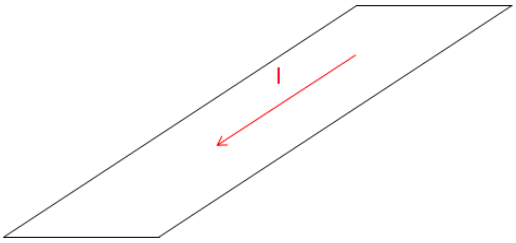


$$H = \pm K\,\overrightarrow{a_y}$$

En donde K es la densidad lineal de corriente sobre la placa, es decir, la corriente total que transporta la placa dividida por el ancho de la misma.

Ejemplo 49. Campo magnético de una placa de corriente.

Una placa conductora transporta una corriente de 10A, como se muestra en la figura.



El ancho de la placa es de 10cm. y la longitud es infinita.

Calcule la intensidad de campo magnético a una distancia de 2mm. sobre la placa.

Solución:

Dado que la altura sobre la que se va a calcular el campo magnético es despreciable frente a las dimensiones de la placa, se puede asumir sin mayor error el caso como el de una placa infinita.

El ancho de la placa es de 10cm, por lo que la densidad lineal de corriente es de:

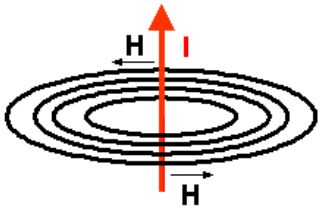
$$K = \frac{10A}{10 \times 10^{-2}m} = 100A/m$$

La intensidad de campo magnético es por lo tanto:

$$H = \pm\, 100\ A/m\ \overrightarrow{a_y}$$

Ley Circuital de Ampere

A partir del campo magnético producido por un filamento de corriente se puede deducir una relación entre la densidad de corriente eléctrica y la intensidad de campo magnético.



$$H = \frac{I}{2\pi r}\,\overrightarrow{a_\varphi}$$

Al calcular la circulación de dicho campo magnético sobre una trayectoria de radio r que envuelve al filamento de corriente se obtiene:

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{I}{2\pi r}\vec{a}_\varphi\right)\cdot\left(rd\varphi\,\vec{a}_\varphi\right) = I$$

Lo cual indica que el campo magnético no es conservativo, es decir, una partícula con una determinada carga magnética que siga una trayectoria cerrada alrededor de un filamento de corriente, gana una energía proporcional a la intensidad de corriente eléctrica transportada por el alambre.

Lo interesante del caso es que a medida que se dan más giros la ganancia de energía es mayor, pudiendo en teoría llegar a ser infinita.

Si la integral se hace sobre n vueltas alrededor del filamento de corriente se obtiene:

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_0^{2n\pi}\left(\frac{I}{2\pi r}\vec{a}_\varphi\right)\cdot\left(rd\varphi\,\vec{a}_\varphi\right) = nI$$

Esto implica que con la misma corriente, se pueden obtener campos magnéticos de gran intensidad, aumentando el número de vueltas en la bobina, o sea que la intensidad de campo magnético, estudiada para el caso de la espira, se multiplica por el número de espiras en el de una bobina de varias vueltas.

De acuerdo con el Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_S \nabla\times\vec{H}\cdot\vec{dS}$$

Por lo tanto se deduce que:

$$\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{dS} = I$$

La única forma en que se satisface esta relación es:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

Esta ecuación corresponde a la formulación diferencial de la Ley de Ampere, cuando se combina con la ley de la mano derecha resulta de gran utilidad para encontrar campos magnéticos en distribuciones simétricas de corriente.

Permeabilidad magnética

Debido a que la densidad de campo magnético está relacionada con la fuerza magnética que es capaz de proporcionar un imán y a que la intensidad de campo magnético es la fuerza por unidad de masa magnética experimentada por un imán en un campo magnético, es evidente que debe existir una relación de proporcionalidad entre estos dos campos vectoriales.

La relación entre ellos se expresa mediante una constante de proporcionalidad como se muestra en la ecuación 45.

$$B = \mu H$$

Ecuación 45. Densidad de flujo magnético en función del campo magnético y de la permeabilidad

La constante **μ** se denomina permeabilidad magnética y cuantifica la facilidad que brinda un medio para la aparición de un campo magnético en su interior, a mayor permeabilidad, mayor densidad de flujo magnético se encontrará en el medio dado.

Las unidades de permeabilidad magnética quedan definidas por un análisis dimensional de la ecuación 45.

$$\mu = \frac{Weber \big/ m^2}{Amperio \big/ m} = \frac{Weber}{Amperio \times metro} = Henrio \big/ metro$$

La relación entre la permeabilidad magnética **μ** y la constante k_m se encuentra definida por la ecuación 46.

$$\mu = \frac{4\pi}{k_m}$$

Ecuación 46. Permeabilidad magnética

En el vacío, la constante k_m tiene un valor conocido de 10^7, por lo que la permeabilidad del vacío es una constante universal de valor:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ Henrio/metro$$

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera del campo magnético se pueden deducir a través de la Ley circuital de Ampere y de la Ley de Gauss para campos magnéticos.

De acuerdo con la Ley de circuital de Ampere se puede hacer un proceso de deducción similar al de las condiciones de frontera Electrostáticas y llegar a un enunciado de las condiciones de frontera de corriente.

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = I \quad \Rightarrow \quad H_{2T} - H_{1T} = \frac{dI}{dl} = K$$

En donde K es la densidad lineal de corriente en la frontera entre los dos medios. Si no existe flujo de corriente en la frontera, se concluye que las componentes tangenciales de campo son iguales a ambos lados de la frontera.

Dado que las líneas de flujo magnético siempre siguen trayectorias cerradas, la divergencia de la densidad de flujo magnético es nula. La componente normal de la densidad de flujo que atraviesa una superficie de frontera debe ser igual a ambos lados de la frontera, tal como ocurre con los campos electrostáticos.

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{n1} - B_{n2} = 0$$

Por lo tanto, la relación entre campos magnéticos normales a ambos lados de la frontera queda expresada por la condición:

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

Propiedades de los materiales magnéticos

Las propiedades magnéticas de los materiales tienen su origen en los momentos magnéticos propios de los átomos asociado con el spin de los electrones y su momento angular orbital, al girar los electrones en sus orbitales alrededor de los átomos, se comportan como una corriente eléctrica que da origen a un momento magnético asociado al átomo, que no debe confundirse con el número cuántico de spin propio del electrón.

Este efecto produce un campo magnético semejante al de una espira de corriente y puede apreciarse en la figura 54.

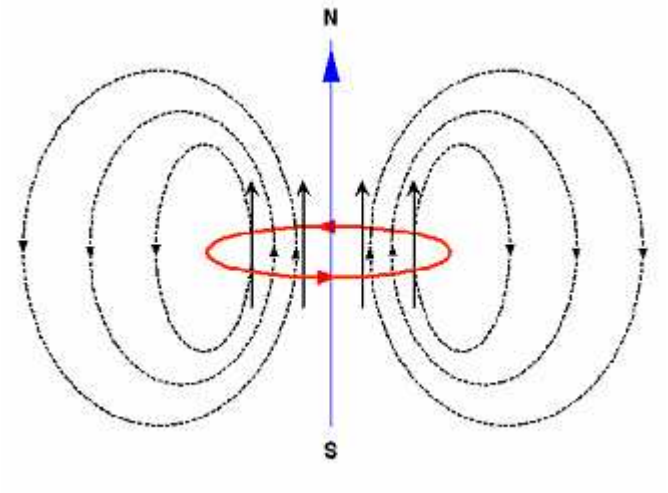


Figura 54. Momento magnético de un átomo

Cuando se aplica un campo magnético externo, los momentos magnéticos propios de los átomos del material tienden a alinearse con él; esta capacidad se denomina susceptibilidad magnética χ_m, y se ilustra en la figura 55.

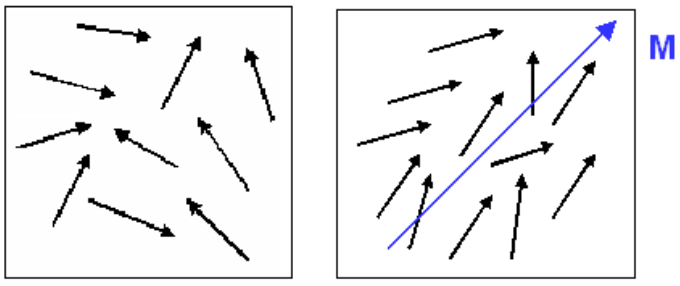


Figura 55. Momentos magnéticos no alineados, y alineados creando una densidad de flujo de magnetización

Según la alineación de sus momentos magnéticos propios, se crea una densidad de flujo de magnetización que caracteriza el comportamiento del material frente al campo magnético.

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

Ecuación 47. Densidad de flujo de magnetización

La densidad de Flujo magnético total es la resultante vectorial de la densidad de flujo externa y la densidad de flujo de magnetización, según se ilustra en la figura 56.

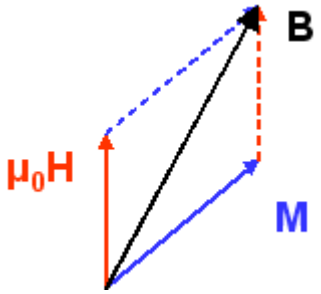


Figura 56. Densidad de flujo total en un material magnético

$$\vec{B} = \vec{M} + \mu_0 \vec{H}$$

Ecuación 48. Densidad de flujo total en un material magnético

La susceptibilidad magnética da origen a una variación en la permeabilidad magnética con respecto a la permeabilidad del vacío.

Esta diferencia, define la permeabilidad relativa del medio, la cual se mide como la relación entre la permeabilidad del medio y la del vacío.

$$\vec{B} = \vec{M} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

La relación entre la permeabilidad magnética de un material y la permeabilidad del vacío se denomina permeabilidad relativa del medio.

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r = 1 + \chi_m$$

Ecuación 49. Permeabilidad relativa de un medio magnético

Clasificación de los materiales según sus propiedades magnéticas

Según la respuesta frente al campo magnético, medida a través de la permeabilidad, en baja frecuencia, los materiales se clasifican en:

- Diamagnéticos
- Paramagnéticos
- Ferromagnético
- Antiferromagnético
- Ferrimagnéticos

Materiales diamagnéticos

En los materiales diamagnéticos la alineación de los momentos magnéticos ocurre de forma débil y opuesta al campo aplicado, la susceptibilidad es ligeramente negativa y la permeabilidad relativa menor a 1.

Son materiales diamagnéticos el cobre, el mercurio y el agua. Los tejidos vivos, por su gran contenido de agua (75%) son también medios diamagnéticos.

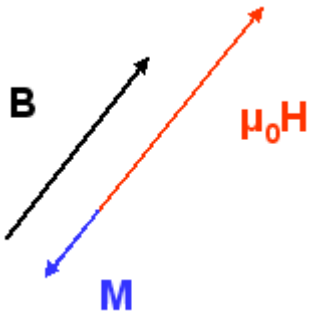


Figura 57. Densidad de flujo total en un material diamagnético

El diamagnetismo es débil, porque obedece a la alineación a nivel de átomos, sin embargo, cuando el campo externo es intenso, se puede producir una repulsión magnética importante que puede ser suficiente para producir efectos de levitación magnética cuando el efecto gravitatorio es también débil.

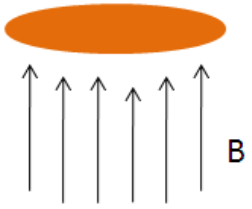
En la tabla 6, se muestra la susceptibilidad magnética de algunos materiales diamagnéticos y se puede apreciar cómo el efecto del diamagnetismo es bastante débil, incluso en algunos casos, se requieren experimentos en campos magnéticos de gran intensidad para poder apreciar su efecto.

Tabla 6. Susceptibilidad magnética de diferentes materiales diamagnéticos

Material	Susceptibilidad (χm)
Bismuto	-1,66E-04
Nitrógeno	-6,70E-09
Alcohol	-7,50E-06
Grafito	-1,60E-05
Sal (NaCl)	-1,40E-05
Agua	-9,10E-06
Mercurio	-2,90E-05
Diamante	-2,10E-05
Plomo (Pb)	-1,80E-05
Plata (Ag)	-2,60E-05
Cobre (Cu)	-1,00E-05
Oro (Au)	-3,50E-05
Dióxido de Carbono (CO2)	-1,20E-08

Ejemplo 50. Levitación diamagnética.

Calcule la densidad de flujo magnético necesaria para generar levitación diamagnética a una altura de 2mm. en un disco de cobre ($\chi_m = -1 \times 10^{-5}$, $\delta = 8.96\ gm/cm^3$) de 2cm. de radio y 50um de espesor, como se muestra en la figura.



Solución:

Para generar levitación diamagnética, la fuerza de repulsión debe ser igual a la fuerza de gravedad actuando sobre el disco de cobre, por lo tanto:

$$F_m + W = 0$$

La fuerza magnética Fm viene determinada por la Ley de Coulomb:

$$F = k_m \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Donde la masa magnética es igual al flujo magnético en la superficie del disco:

$$m_1 = B \times S \qquad m_2 = M \times S$$

$$F_m = k_m \frac{MBS^2}{d^2}$$

La masa del disco de cobre es igual al producto del volumen por la densidad del disco:

$$W = \delta_{Cu} V g$$

El volumen del disco es igual al producto de la superficie por el espesor del disco δ:

$$W = \delta_{Cu} S \delta g$$

Reemplazando:

$$k_m \frac{MBS^2}{d^2} + \delta_{Cu} S \delta g = 0$$

La densidad de flujo de magnetización a su vez es proporcional a la densidad de flujo externa B:

$$M = \chi_m B$$

Por lo tanto:

$$k_m \frac{\chi_m B^2 S^2}{d^2} + \delta_{Cu} S \delta g = 0$$

Se despeja B:

$$B = \sqrt{\frac{-\delta_{Cu} S \delta g d^2}{k_m \chi_m S^2}} = \sqrt{\frac{-\delta_{Cu} \delta g d^2}{k_m \chi_m S}}$$

Reemplazando valores:

$$B = \sqrt{\frac{-8.96\, {}^{gm}/_{cm^3} \times 50 \times 10^{-4} cm \times 982\, {}^{cm}/_{seg^2} \times (0.2cm)^2}{1 \times -1 \times 10^{-5} \times \pi \times (2cm)^2}}$$

$$B = 118\, Gauss$$

Materiales paramagnéticos

En los materiales paramagnéticos la alineación ocurre de forma débil al igual que en los diamagnéticos, pero la dirección coincide con la del campo aplicado; la susceptibilidad es ligeramente positiva y la permeabilidad relativa ligeramente mayor a 1. Como resultado se produce una atracción magnética débil.

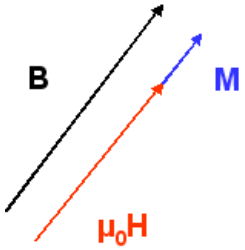


Figura 58. Densidad de flujo total en un material diamagnético

El paramagnetismo al igual que el diamagnetismo es débil, porque obedece a la alineación a nivel de átomos.

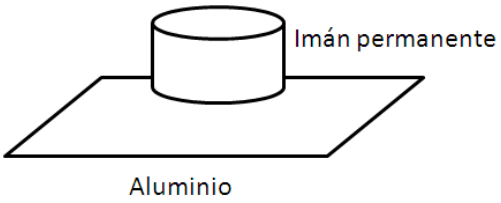
Son materiales paramagnéticos el aluminio y el sodio. En la tabla 7 se encuentra la susceptibilidad magnética de algunos materiales paramagnéticos.

Tabla 7. Susceptibilidad magnética de materiales paramagnéticos

Material	Susceptibilidad (χm)
Titanio	1,80E-04
Platino	2,93E-04
Aluminio	2,10E-05
Sodio	8,40E-06
Oxígeno	1,94E-06
Magnesio	1,20E-05
Tungsteno	7,60E-05

Ejemplo 51. Atracción paramagnética.

Calcule la fuerza de atracción entre una placa de aluminio y un imán permanente de 60mT de densidad de flujo y 2cm de diámetro, a una distancia de 1mm.



Solución:

La fuerza magnética Fm viene determinada por la Ley de Coulomb:

$$F = k_m \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Donde la masa magnética es igual al flujo magnético en la superficie del imán:

$$m_1 = B \times S \qquad m_2 = M \times S$$

$$F_m = k_m \frac{MBS^2}{d^2}$$

La densidad de flujo de magnetización, a su vez, es proporcional a la densidad de flujo externa B:

$$M = \chi_m B$$

Por lo tanto:

$$F = k_m \frac{\chi_m B^2 S^2}{d^2}$$

Reemplazando en el sistema SI:

$$B = 0.06T$$

$$F = 10^7 \times \frac{2.1 \times 10^{-5} \times (0.06T)^2 \pi^2 \times (1 \times 10^{-2} m)^4}{(1 \times 10^{-3} m)^2}$$

$$F = 0.0746N = 7.6gm$$

Como se puede apreciar, la atracción es muy débil.

Materiales antiferromagnéticos

Son materiales en los cuales los momentos magnéticos atómicos individuales se encuentran opuestos en el interior de una estructura cristalina rígida. La estructura cristalina impide la adecuada alineación de los momentos magnéticos por lo que el material es transparente frente al campo magnético. La susceptibilidad magnética es cero y la permeabilidad tiende a ser la del vacío.

En estas condiciones, no existe densidad de flujo de magnetización. En los materiales antiferromagnéticos, sin embargo, la susceptibilidad magnética es afectada por la temperatura, y cuando alcanzan una temperatura crítica llamada Temperatura de Neel, empiezan a comportarse como materiales paramagnéticos, tal como se muestra en la figura 59.

Dentro de los materiales antiferromagnéticos se cuentan el fluoruro de manganeso (MnF), el óxido de manganeso (MnO), el óxido de hierro (FeO)y el cromo.

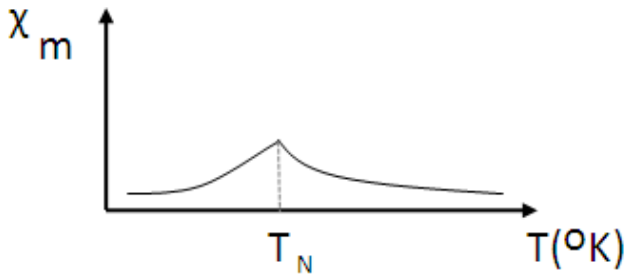


Figura 59. Muestra antiferromagnética siguiendo la Ley de Neel

Materiales ferromagnéticos

En los materiales ferromagnéticos, los momentos magnéticos propios de los átomos individuales se alinean de forma espontánea dando origen a grandes estructuras magnetizadas denominadas dominios magnéticos.

Los dominios magnéticos contienen entre 10^{21} y 10^{27} átomos y su tamaño varía entre 10^{-12} y 10^{-8} m^3.

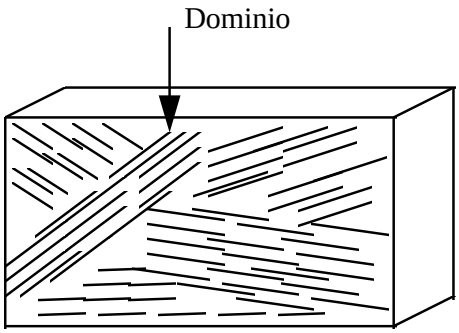


Figura 60. Dominios magnéticos en una muestra de material ferromagnético

Cuando se aplica un campo magnético externo, los dominios se alinean con él, dando origen a un fuerte acoplamiento magnético. Dicha alineación permanece aun cuando se ha retirado el campo externo.

La susceptibilidad es considerable y la permeabilidad relativa puede ser mucho mayor a 1. Como resultado, se produce una atracción magnética fuerte, que puede ser fácilmente usada para efectos de levitación magnética en los trenes, como el Maglev, y de los sistemas industriales de transporte de carga por levitación.

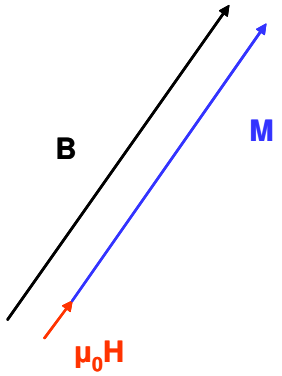


Figura 61. Densidad de flujo total en un material ferromagnético

Los materiales ferromagnéticos se caracterizan por tener permeabilidades relativas del orden de 10^3 o superiores, llegando hasta valores de 10^5.

Saturación magnética

Los materiales ferromagnéticos tienen una característica adicional denominada saturación magnética, consistente en que a medida que aumenta la alineación de los dominios con el campo magnético externo, se hace más difícil incrementar dicha alineación.

Esta característica hace que la susceptibilidad magnética se reduzca considerablemente y, en consecuencia, la permeabilidad magnética relativa se reduzca.

Esto da origen a un comportamiento no lineal en la curva de densidad de flujo magnético contra intensidad de campo magnético aplicado,[14] denominada curva de magnetización del material.

En la figura 62 se muestra una curva de magnetización típica de un material ferromagnético; en ella pueden apreciarse tres zonas claramente delimitadas:

- Una primera zona, aproximadamente lineal, en donde cambios en la intensidad de campo magnético producen cambios proporcionales de densidad de flujo magnético, esta zona se denomina lineal.
- Una zona en la cual la permeabilidad empieza a decrecer, haciendo que los cambios de flujo magnético dejen de ser proporcionales a cambios en la intensidad de campo magnético, denominada codo de saturación.
- Una tercera zona, denominada de saturación, en la cual los cambios en la densidad de flujo ya no son proporcionales a los cambios en la intensidad de campo magnético.

En esta zona de saturación, la permeabilidad decrece abruptamente dada la imposibilidad de los dominios magnéticos de alinearse aún más con el campo magnético aplicado.

[14] La intensidad de campo magnético aplicado recibe también el nombre de fuerza magneto motriz por analogía con la fuerza electromotriz de la Teoría de Circuitos.

En general, son materiales ferromagnéticos las aleaciones de hierro, níquel, cobalto y sus derivados, como algunos tipos de aceros.

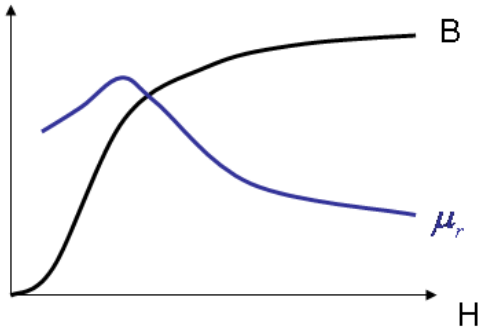


Figura 62. Curva típica de magnetización y de permeabilidad contra intensidad de campo magnético para un material ferromagnético

En la figura 63, se muestra una curva de magnetización de una muestra de acero al silicio laminado, obtenida en el laboratorio de física de la Pontificia Universidad Javeriana. El acero al silicio laminado es el material de fabricación de muchas máquinas eléctricas, como motores, transformadores, etc. En la figura 64 se muestra la curva de permeabilidad relativa para el mismo material.

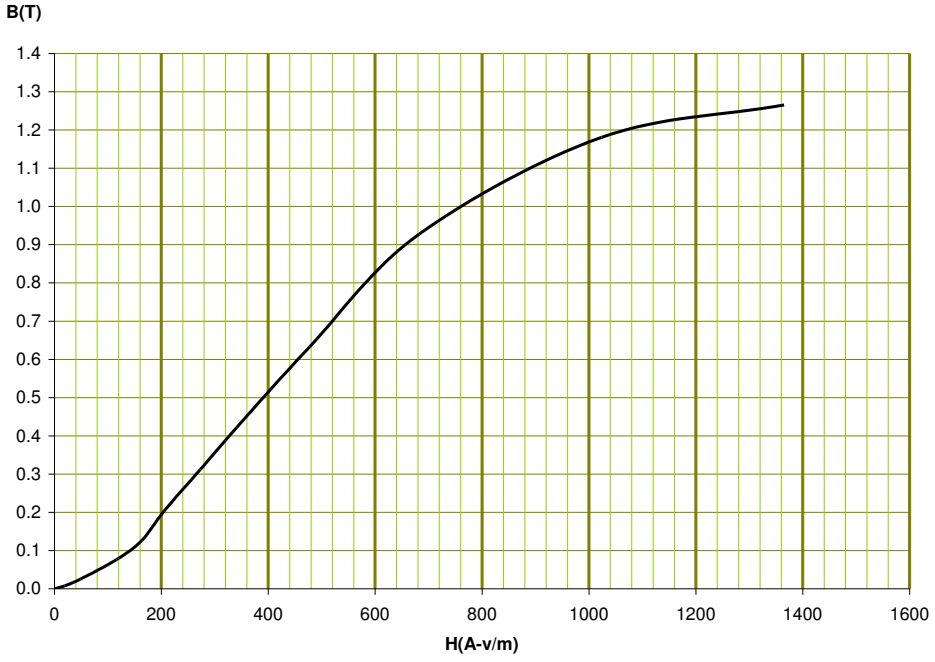


Figura 63. Curva de magnetización para una muestra de acero al silicio laminado, obtenida en laboratorio

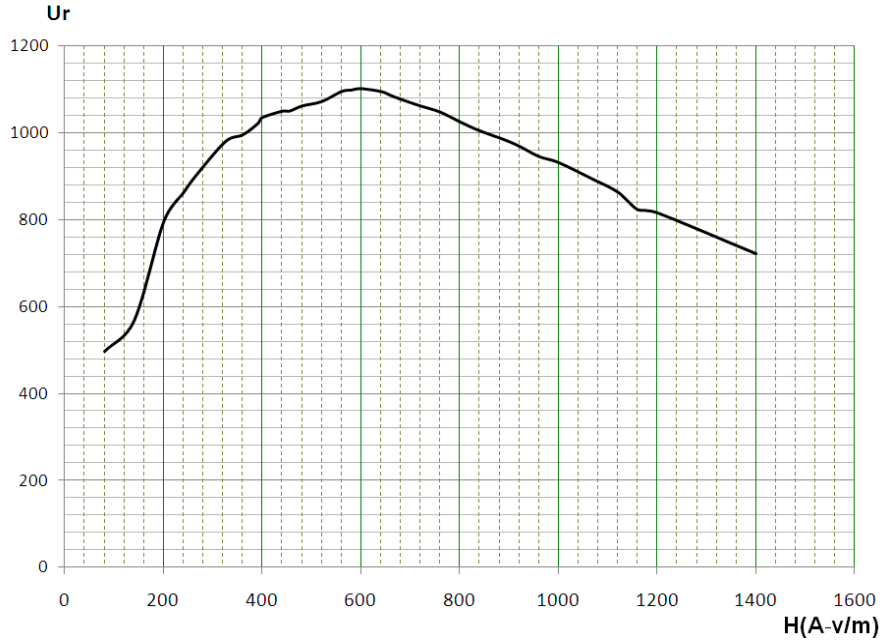


Figura 64. Permeabilidad relativa vs. intensidad del campo magnético para el acero al Si laminado

El fenómeno de saturación hace que la permeabilidad de un material ferro magnético no sea una constante, sino una función cuyo valor depende del punto de trabajo establecido mediante un campo magnético externo H, por lo que no tiene sentido preguntar por la permeabilidad de un material ferro magnético sin establecer previamente el punto de trabajo.

Ejemplo 52. Densidad de flujo en un material ferromagnético.

Calcule la densidad de flujo presente en una muestra de acero al silicio laminado sometida a un campo magnético de intensidad de 550A-v/m. Aproxime el valor de la permeabilidad relativa.

Solución:

Para poder aproximar este valor se puede hacer una interpolación lineal entre dos valores conocidos.

De la curva B-H para este material (figura 63) se obtienen dos puntos, uno antes y uno después del punto dado, que se comporten en forma aproximadamente lineal:

Punto 1: H=460 B=0.6 **Punto 2**: H=580 B=08

Se obtiene una pendiente aproximada para el tramo de la curva:

$$\frac{dB}{dH} = \frac{0.8 - 0.6}{580 - 460} = \frac{0.2}{120} \cong \frac{1}{600}$$

Se hace una aproximación lineal del punto buscado:

$$B(550) \cong B(460) + \frac{dB}{dH} \times \Delta H$$

$$B(550) \cong 0.6 + \frac{1}{600} \times (550 - 460)$$

$$B(550) \cong 0.75T$$

Para aproximar el valor de la permeabilidad relativa, se calcula primero la permeabilidad:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.75T}{550A - v/m} = 136.36 \times 10^{-5} H/m$$

Se divide por la permeabilidad del vacío:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{136.36 \times 10^{-5} H/m}{4\pi \times 10^{-7} H/m} = 1085$$

En la figura 65, se muestra la curva de magnetización de otros materiales ferromagnéticos de uso común en ingeniería y, en la figura 66, se muestran sus respectivas permeabilidades relativas.

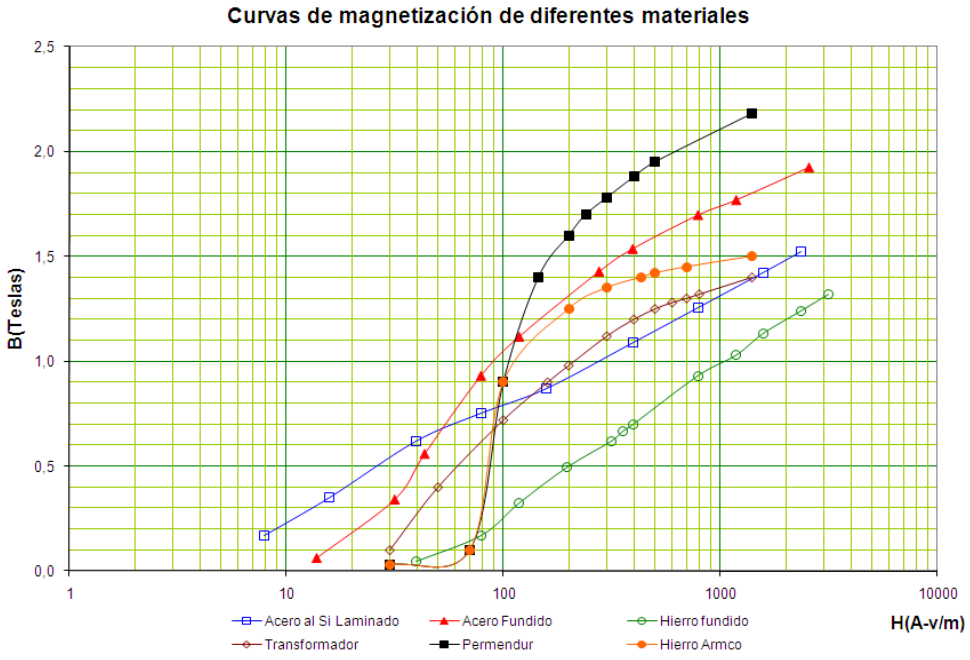


Figura 65. Curvas de magnetización para diferentes materiales ferromagnéticos

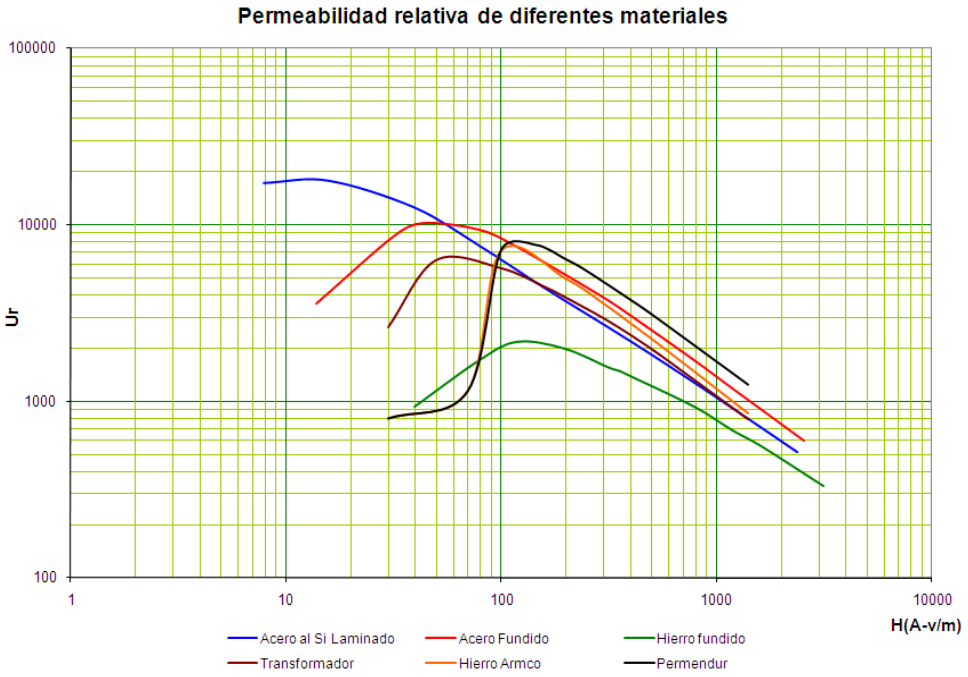


Figura 66. Permeabilidad relativa de diferentes materiales ferromagnéticos

Remanencia

En los materiales ferromagnéticos, la interacción magnética es tan fuerte que permanece aun cuando se retira el campo magnético externo que desencadenó el proceso de magnetización. Esta propiedad recibe el nombre de remanencia y se expresa en la presencia de una densidad de flujo de magnetización que permanece en ausencia del campo original que la produjo.

La remanencia es la base de la presencia de imanes permanentes, en los cuales existe densidad de flujo sin haber fuentes de campo magnético, como se ilustra en la figura 67.

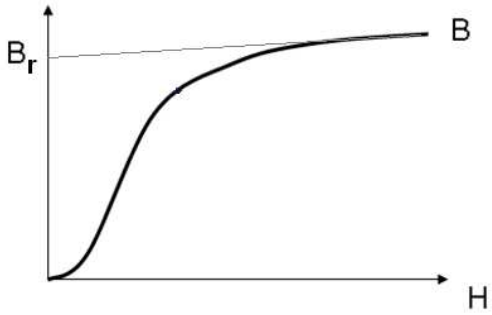


Figura 67. Densidad de flujo remanente después de un proceso de magnetización

Se dice, por lo tanto, que los materiales ferromagnéticos poseen memoria magnética, lo cual permitió usarlos en el pasado para crear dispositivos portátiles de memoria, como cintas magnéticas, disquetes, entre otros.

La presencia de la remanencia significa, por otra parte, que el comportamiento de un material ferromagnético frente a un campo magnético externo no depende exclusivamente de las características del material, sino también de la historia magnética del mismo, es decir de la alineación remanente de procesos pasados de imantación.

Para eliminar la presencia del flujo magnético remanente se necesita la aplicación de un campo magnético de sentido contrario cuya intensidad recibe el nombre de fuerza coercitiva.

Materiales ferrimagnéticos

Los materiales ferrimagnéticos son similares a los antiferromagnéticos, pero los átomos que componen la estructura cristalina son diferentes, por lo que dan origen a un momento magnético débil capaz de alinearse con un campo magnético externo.

Es el caso de las llamadas ferritas, cuyas permeabilidades no alcanzan los niveles de la permeabilidad de materiales ferromagnéticos, pero es suficientemente alta como para aplicaciones de construcción de bobinas y transformadores para radiofrecuencia.

Los materiales ferrimagnéticos también presentan saturación y sus propiedades magnéticas están directamente asociadas a su naturaleza cristalina y a su tratamiento industrial.

En la figura 68, se presenta un resumen de las propiedades de los materiales en presencia de campos magnéticos.

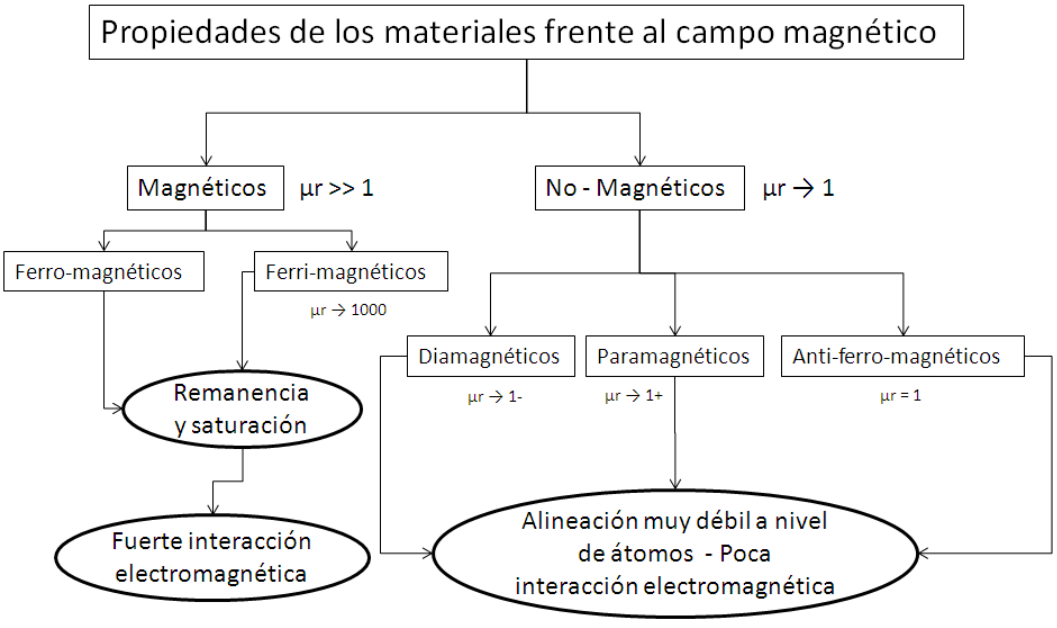


Figura 68. Cuadro resumen de las propiedades de los materiales frente al campo magnético

Factores que afectan la susceptibilidad magnética

La susceptibilidad magnética se ve afectada por diferentes factores que incide en las propiedades magnéticas y la estructura atómica, molecular, o el ordenamiento de los cristales del material considerado.

Estos factores son similares a los considerados en el cambio de la resistividad o de la permitividad eléctrica.

Temperatura

El estado de agitación térmica de los átomos o moléculas del material afectan el orden de la estructura cristalina y, por tanto, la capacidad de alinearse con el campo magnético externo.

Los materiales paramagnéticos siguen la llamada Ley de Curie, según la cual, el momento magnético medio de los átomos depositados es inversamente proporcional a la temperatura absoluta, con lo que la susceptibilidad decrece de forma inversa con la temperatura absoluta de la muestra.

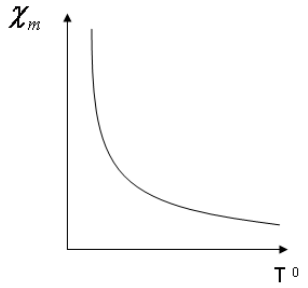


Figura 69. Comportamiento de la susceptibilidad magnética contra la temperatura absoluta en un material paramagnético

Los materiales ferromagnéticos siguen la Ley de Curie hasta una temperatura límite denominada temperatura de Curie, en ese punto, presentan un decaimiento abrupto de la susceptibilidad y pasan a comportarse como materiales paramagnéticos. Como se muestra en la figura 70.

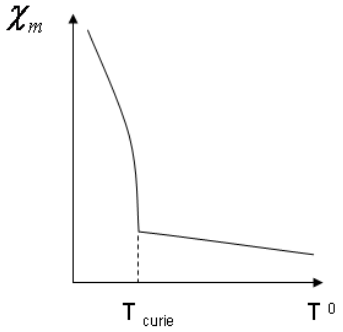


Figura 70. Comportamiento de la susceptibilidad magnética contra la temperatura absoluta en un material ferromagnético

En la tabla 8, se encuentran las temperaturas de Curie para algunos materiales ferromagnéticos.

Tabla 8. Temperatura de Curie para tres materiales ferromagnéticos

Material	Temperatura de Curie (°C)
Hierro fundido	770
Níquel	354
Cobalto	1115

Los materiales antiferromagnético presentan un comportamiento diferente, no siguen la Ley de Curie, sino la llamada Ley de Neel.

En estos materiales, se presenta un crecimiento de la susceptibilidad a medida que aumenta la temperatura absoluta de la muestra, alcanzando un máximo en la denominada temperatura de Neel, a partir de donde la susceptibilidad decrece con el incremento de temperatura absoluta. El comportamiento de estos materiales se muestra en la figura 71.

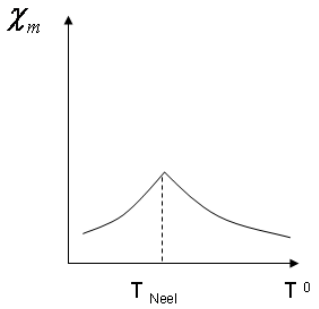


Figura 71. Comportamiento de la susceptibilidad magnética contra la temperatura absoluta en un material antiferromagnético

Tabla 9. Temperatura de Neel para varios materiales antiferromagnéticos

Material	Temperatura de Neel (°C)
Ferro manganeso (FeMn)	217
Óxido de cobalto (CoO)	18
Óxido de hierro (FeO)	-75
Óxido de níquel (NiO)	260-377
Óxido de manganeso (MnO)	-151
Seleniuro de manganeso (MnSe)	-100
Cromio	202

Frecuencia[15]

Cuando la corriente que da origen al campo magnético es de naturaleza alterna, la fuerza magneto motriz es también alterna y conserva la frecuencia y fase de la corriente aplicada, de acuerdo con la ley de Biot–Savart.

$$H = k\frac{i(t)}{d^2}$$

La densidad de flujo magnético, sin embargo, no es proporcional a la intensidad de campo magnético, en especial en los materiales ferromagnéticos y ferrimagnéticos.

Cuando un material ferromagnético o ferrimagnético se magnetiza, conserva una densidad de flujo de remanencia que debe ser eliminada mediante la fuerza coercitiva, dando origen a un ciclo de magnetización y demagnetización por cada ciclo de la corriente alterna aplicada, como se ilustra en la figura 72.

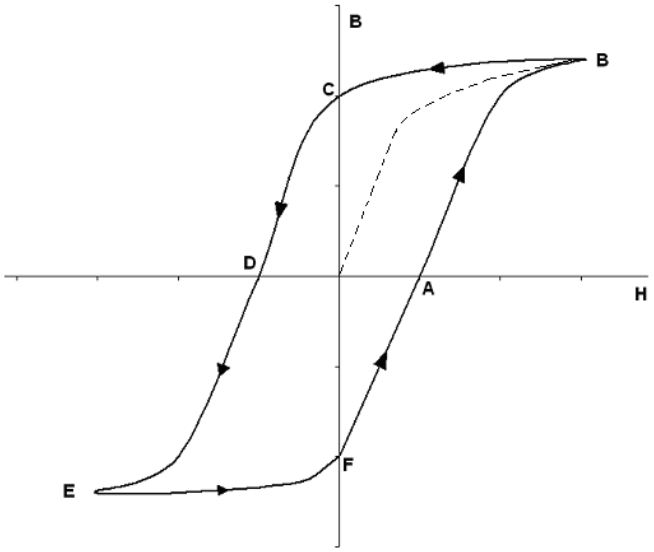


Figura 72. Ciclo de histéresis de un material ferromagnético o ferrimagnético.

La curva, ilustrada en la figura 72, recibe el nombre de ciclo normal de histéresis y se obtiene al incrementar la intensidad de campo magnético **H,** desde el valor cero, hasta un valor máximo regresando luego muy lentamente hasta el cero.

Al volver al punto cero en intensidad de campo magnético, la densidad de flujo no es cero, por lo que se debe aplicar una fuerza magneto motriz coercitiva que actúa como una intensidad de campo de recuperación.

[15] PAZ, Alejandro. Palomino Jairo. "Principio de transferencia de energía a través del campo electromagnético". Revista Energía y Computación. Volumen 6. No 1. pp. 101-107. 1997.

El ciclo, mostrado en la figura 72, tiene los siguientes puntos críticos a destacar.

B Punto de saturación máxima positiva.
C Reducción de la fuerza magneto motriz a cero en el cruce por cero de la corriente. En este punto se evidencia la existencia de una inducción remanente $\mathbf{B_r}$.
D Eliminación de la remanencia por la aplicación de una fuerza magneto motriz de sentido contrario o fuerza coercitiva $\mathbf{-H_C}$.
E Punto de saturación máxima negativa.
F Reducción de la fuerza magneto motriz a cero en el cruce por cero de la corriente en el siguiente semiciclo. En este punto se evidencia la existencia de una inducción remanente de sentido contrario $\mathbf{-B_r}$.
A Eliminación de la remanencia negativa por la aplicación de una fuerza magneto motriz positiva $\mathbf{H_C}$.

Variando los valores de intensidad de campo máximo al que se somete la muestra de material, se puede obtener toda una familia de curvas, como se muestra en la figura 73.

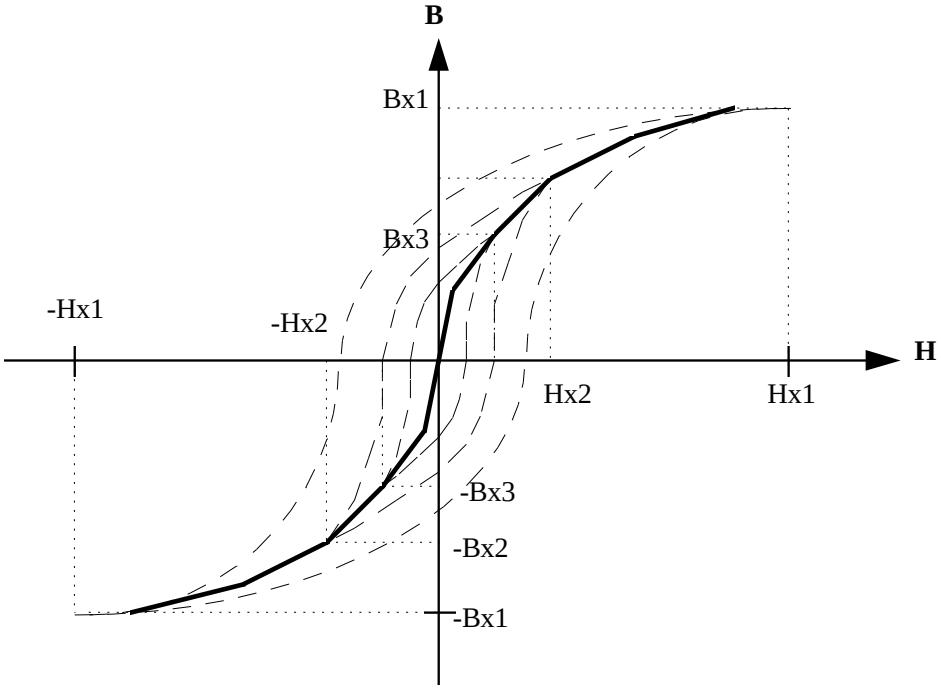


Figura 73. Familia de ciclos de histéresis para un material ferromagnético sometido a diferentes intensidades máximas de campo magnético H

Cuando un material se somete a un campo magnético variable, el ciclo normal de histéresis se hace ligeramente más ancho debido a la inducción de las corrientes parásitas en su interior, de acuerdo con la Ley de Inducción de Faraday.

La inducción de corrientes parásitas depende esencialmente de la conductividad del material y de la frecuencia del campo electromagnético aplicado, debido a la no linealidad en el comportamiento de los materiales ferromagnéticos; la corriente usada para generar el campo magnético H muy difícilmente es de forma senoidal, por lo que la deformación de la onda incluye diversos armónicos cuya frecuencia produce también la formación de corrientes parásitas que ensanchan el ciclo dinámico.

En la figura 74, se aprecia el ensanchamiento del ciclo dinámico debido al aumento de la frecuencia del campo electromagnético aplicado.

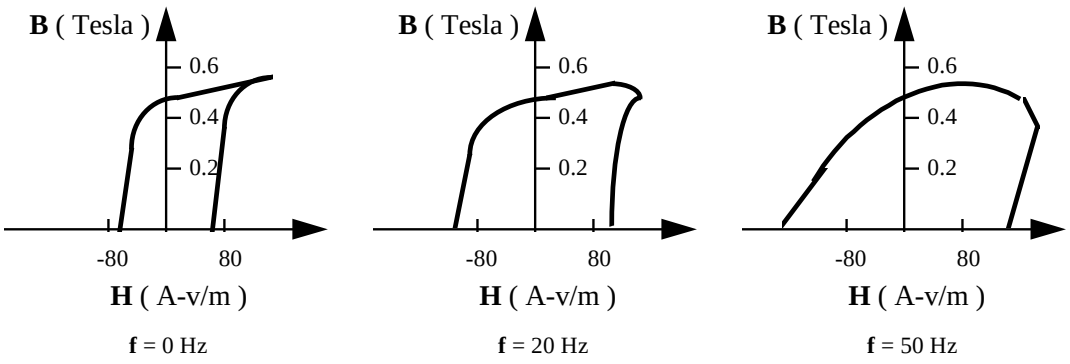


Figura 74. Ensanchamiento del ciclo dinámico de histéresis con respecto a la frecuencia. Tomado para una misma muestra con un mismo valor de H a diferentes frecuencias

Estos efectos sobre el ciclo dinámico de histéresis generan una reducción en la capacidad de magnetización del material; a frecuencia críticas, la susceptibilidad decrece dando origen a una permeabilidad magnética menor a la nominal del material, como se ilustra en la figura 75.

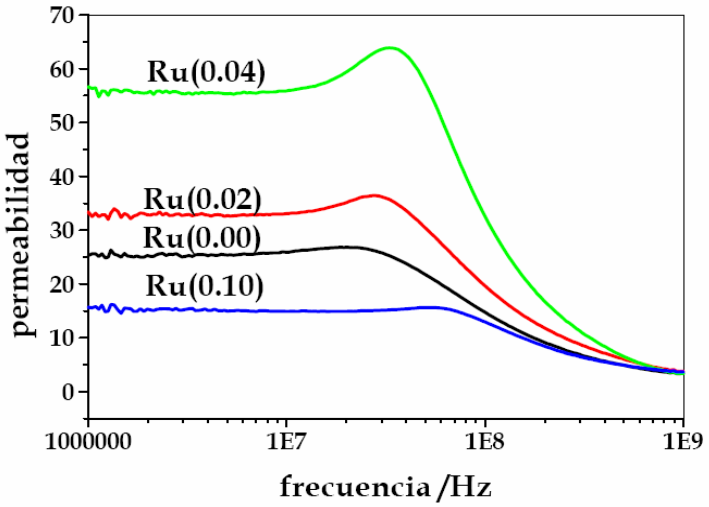


Figura 75. Respuesta en frecuencia de una ferrita de NiZn con impurezas de rutenio[16]

[16] "The Effect of Rare Earth Substitution on the Magnetic Properties of Ni0.5Zn0.5MxFe2-xO4 (M:rare earth)". S.E. Jacobo, W.G. Fano and A.C. Razzitte Physica B vol 320/1-4, 261-263 (2002).

De acuerdo con la figura 75, el núcleo de ferrita o de material ferromagnético para transformadores, actúa como un filtro pasabajas, permitiendo la creación de un flujo magnético de baja frecuencia, pero impidiendo la creación de flujo de alta frecuencia para los armónicos superiores de una señal de corriente no senoidal.

Potencial magnético escalar

El potencial magnético escalar es una función matemática escalar definida para facilitar el cálculo de campos magnéticos en regiones en las cuales no existe densidad de corriente.

$$H = -\nabla V_m$$

De acuerdo con esta definición, debe cumplirse y también que:

$$\nabla \times \left(-\nabla V_m\right) = 0$$

Sin embargo, esta condición solamente se satisface en regiones en las que la densidad de corriente es cero.

$$\nabla \times \left(-\nabla V_m\right) = \nabla \times H = J$$

La ventaja, sin embargo, de trabajar con potencial magnético escalar, es que esta función cumple con la ecuación de Laplace debido a que:

$$\nabla \bullet H = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \bullet \left(-\nabla V_m\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V_m = 0$$

De forma general, este potencial magnético escalar puede calcularse como:

$$V_m = -\int_a^b H \bullet dl$$

De donde se deduce que las unidades de este potencial son amperes.

El potencial magnético escalar, sin embargo, presenta inconvenientes de multivalencia cuando la trayectoria escogida para la integración encierra una corriente **I**, ya que como se conoce de la Ley de Ampere:

$$\oint H \bullet dl = nI$$

Siendo n el número de vueltas que se dan en la trayectoria, esto significa que al dar una vuelta completa, el potencial magnético escalar ya no es el mismo.

Ejemplo 53. Calculo de la diferencia de potencial magnético escalar.

Dado un alambre infinito que transporta una corriente de 20A, en dirección del eje z. Calcule la diferencia de potencial magnético escalar entre dos puntos situados en A(1, 0,0) y B(0, 1,0).

Solución:

Los dos puntos se pueden pasar a Coordenadas Cilíndricas obteniendo:

$$A = (r = 1, \varphi = 0, z = 0\ )$$

$$B = \left(r = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}, z = 0\ \right)$$

El campo debido a un filamento infinito de corriente es:

$$H = \frac{I}{2\pi r}\overrightarrow{a_\varphi}$$

Como r y z permanecen constantes y solo cambia la coordenada φ, el Diferencial de Longitud queda:

$$\overrightarrow{dl} = rd\varphi\overrightarrow{a_\varphi}$$

La diferencia de potencial se calcula como:

$$V_m = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{I}{2\pi r} \times rd\varphi = -\frac{I}{4} = -5A$$

Potencial magnético vectorial

Dado que se conoce que la divergencia del rotacional de cualquier Campo Vectorial es siempre igual a cero:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathrm{A}) = 0$$

Y que de acuerdo con la Ley de Gauss para el campo magnético se tiene que:

$$\nabla \cdot B = 0$$

Se puede encontrar una función vectorial **A** tal que:

$$\nabla \times A = B$$

Este Campo Vectorial A recibe el nombre de potencial magnético vectorial y se puede definir en cualquier región del espacio, independientemente de la distribución de corriente, a diferencia del potencial escalar.

Cuando se parte de la relación:

$$B = \mu H$$

Se puede encontrar una relación entre el potencial magnético vectorial y la intensidad de campo magnético H.

$$\nabla \times A = \mu H$$

Cuando se usa la Ley Circuital de Ampere se puede llegar a una definición en términos de la corriente:

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \mu \nabla \times H$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times A) = J$$

A partir de esta ecuación y usando la identidad.

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \bullet A) - \nabla^2 A = \mu J$$

Se puede demostrar:

$$\nabla^2 A = -\mu J$$

Esto por supuesto resulta sencillo de resolver para ciertas condiciones de distribución de corriente, permitiendo el cálculo del campo magnético de una manera más simple que la ley de Biot-Savart.

Ejemplo 54. Cálculo del potencial magnético vectorial debido a una distribución de corriente.

Calcular el potencial magnético vectorial para una distribución de corriente eléctrica. $\vec{j} = j_0 \overrightarrow{a_z}$.

Calcular el potencial magnético vectorial y la densidad de flujo magnético en una región:

$$r \le r_0 \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad 0 < z < z_0$$

Solución:

La ecuación de Laplace para el Campo Vectorial A queda definida por:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu \vec{j}$$

Como la corriente solo tiene componente z, y la distribución es simétrica con respecto a φ, el potencial magnético tiene solo componente en dirección z que varía con r.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right)=-\mu\ j_0$$

De donde sale en la primera integración:

$$r\frac{\partial A}{\partial r}=-\frac{1}{2}r^2\mu\ j_0+c_1$$

En una segunda integración se obtiene:

$$\vec{A}=\left(-\frac{\mu\, j_0}{4}r^2+c_1 Ln(r)+c_2\right)\vec{a}_z$$

Para calcular los valores de las constantes se hace necesario definir condiciones de frontera y un punto de referencia como potencial cero, por lo que la solución para el potencial magnético vectorial no es única.

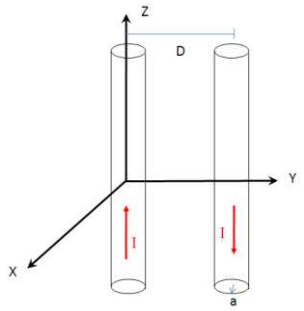
La densidad de flujo se puede determinar mediante la ecuación:

$$\nabla\times A=B$$

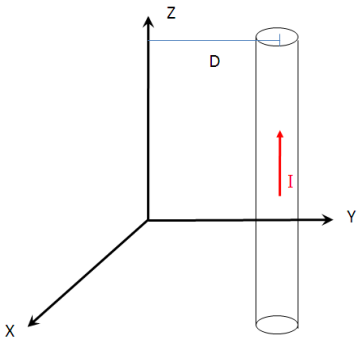
$$B=\nabla\times A=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\overrightarrow{a_r} & r\overrightarrow{a_\varphi} & \overrightarrow{a_z}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A_z\end{vmatrix}=\frac{\partial A_Z}{\partial r}\vec{a}_\varphi$$

Ejercicios del capítulo

1. Para un par de conductores iguales de radio a, separados por una distancia D, tal como se muestra en la figura, donde cada conductor transporta la misma corriente pero de sentido contrario I, obtenga la ecuación de la intensidad de campo magnético en la región que separa los dos conductores $(a < y < D - a)$ a lo largo del eje Y $(x = 0)$, en función de y.

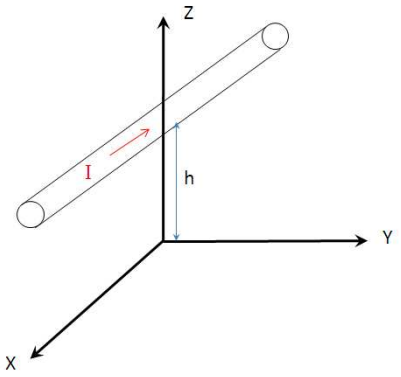


2. Para un conductor aislado de radio a, separado por una distancia D del eje Z y ubicado sobre el eje Y, tal como se muestra en la figura, obtenga la ecuación de la intensidad de campo magnético a lo largo del eje X $(y = 0)$, en función de x. Realice un gráfico de $|H| = f(x)\ ;\ -10D < x < 10D$.



3. Para el mismo caso del punto 2, considere $\mathrm{D} = 10\mathrm{cm}, \mathrm{I} = 1\mathrm{A}$. Encuentre la distancia a la cual el campo magnético H tiene una magnitud de 0.7A/m, calcule la densidad de flujo máxima sobre el eje X, para el caso en que este alambre se encuentre en el vacío.

4. Utilice el resultado obtenido en el punto 2, para calcular la densidad de flujo máxima que se presenta en una línea de transmisión de 600A, que pasa sobre el suelo a una altura $h = 6m$, justo sobre el eje x, tal como se muestra en la figura. Calcule la distancia Y a la que debe encontrarse una persona de la línea para que esta densidad de flujo sea inferior a 5uT.



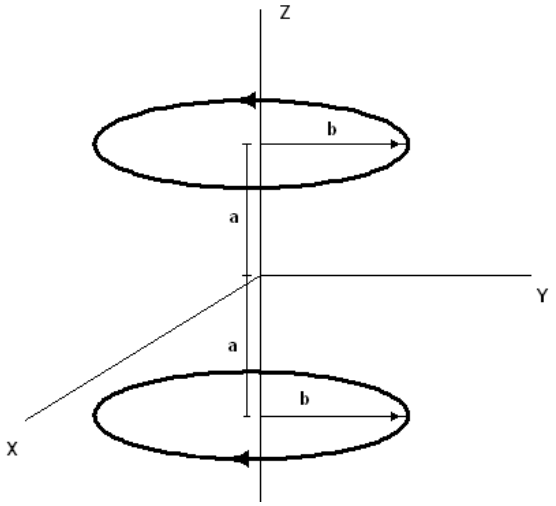
5. Dado un campo $\vec{H} = \frac{10}{r}\overrightarrow{a_\varphi}$, calcule la corriente total que atraviesa la región $r < 1$ en dirección $\overrightarrow{a_z}$. Calcule la densidad de flujo sobre la curva $r = 2$ y el flujo magnético total sobre el plano $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $1 < r < 2\,, 0 < z < 1$.

6. Dado un campo $\vec{j} = 3000\overrightarrow{a_Z}\ A/m^2$, definido dentro de la región $r < 0.1$ en el vacío, siendo $j = 0$ en cualquier otro punto.

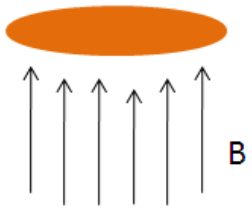
- Obtenga el valor de la intensidad de campo magnético H en función de r para la región $r < 0.1$.
- Obtenga la misma intensidad de campo magnético H en la región $r > 0.1$.
- Obtenga el valor de r, para la región $r > 0.1$ en la cual la densidad de flujo es de 30uT.

7. Un sistema formado por dos espiras circulares cuyo eje coincide con el eje z y ubicadas simétricamente con respecto al plano XY, a una distancia a del mismo, transportan una corriente I cada una. La espira superior transporta esta corriente en dirección $\overrightarrow{a_\varphi}$, mientras la espira inferior lo hace en sentido contrario, como se muestra en la figura.

Obtenga una expresión para el campo magnético H (vectorial) en cualquier punto localizado sobre el eje z.



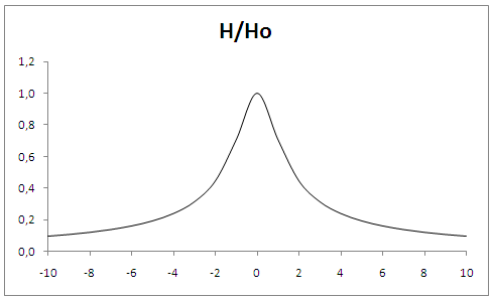
8. Calcule la densidad de flujo magnético necesaria para generar levitación diamagnética a una altura de 2mm en un disco de plata ($\chi_m = -2.6 \times 10^{-5}$, $\delta = 10.49\ gm/cm^3$) de 2cm de radio y 50um de espesor, como se muestra en la figura.



Respuestas de los ejercicios

1. $\vec{H} = \frac{I}{2\pi}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{D-y}\right](-\vec{a_x})$

2. $H = \frac{I}{2\pi\sqrt{x^2+D^2}}$



$H_o = \frac{I}{2\pi D}$

3. En $x = 20.5cm$ se tiene $|H| = 0.7A/m$

4. $B_{max} = 20\mu T$ $Y = 23.2m$

5. 20π Amp 2π μT 3π μWb

6. $\vec{H} = 1500r\,\vec{a_\varphi}$ $r < 0.1$ $\vec{H} = \frac{15}{r}\vec{a_\varphi}$ $r > 0.1$ $r = 63cm$

7. $\vec{H} = \frac{b^2 I}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{b^2+(z+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+(z-a)^2}}\right\}\vec{a}_z$

8. $B = 398$ Gauss

Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para Ley de Biot-Savart, Ley Circuital de Ampere, propiedades del campo magnético estable y potencial magnético escalar y vectorial:

Hayt, William H. Buck, John A. *Teoría Electromagnética*. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 153-184. ISBN 978-607-15-0783-9.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B., Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics-Mainly electromagnetism and matter*. Sexta edición. USA: Addison Wesley publishing company S.A., 1963. Volumen 2. Capítulo 13. ISBN 0-201-02010-6.

Para propiedades de los materiales magnéticos:

Reitz, John D., Milford, Frederick J., Christy, Robert W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Cuarta edición. México: Addison Wesley, 1996. Páginas 230-238. ISBN 968-444-403-6.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B., Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics-Mainly electromagnetism and matter*. Sexta edición. USA: Addison Wesley publishing company S.A., 1963. Volumen 2. Capítulo 34. ISBN 0-201-02010-6.

Para materiales ferromagnético y ferromagnetismo:

Feynman, Richard, Leighton, Robert B., Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics-Mainly electromagnetism and matter*. Sexta edición. USA: Addison Wesley publishing company S.A., 1963. Volumen 2. Capítulo 36. ISBN 0-201-02010-6.

Para potencial magnético vectorial:

Cheng, David K. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. Primera edición. Argentina: Addison Wesley Iberoamericana, 1997. Páginas 178-180. ISBN 0-201-65375-3.

Capítulo 6

Electrodinámica y ondas

Introducción

El modelo electrodinámico, formulado por Maxwell, fue el comienzo de una revolución en la comprensión de los fenómenos electromagnéticos que dio origen, en 1905, al famoso artículo "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento" en donde Albert Einstein presentaba su teoría de la relatividad especial.

Este conjunto de ecuaciones lograron unificar los conocimientos sobre la fenomenología electromagnética en un modelo coherente, reducido y matemáticamente consistente que permitió entre otras cosas la predicción y posterior descubrimiento de las ondas electromagnéticas.

Hoy en día, el modelo electrodinámico de Maxwell tiene plena vigencia en los sistemas de telecomunicaciones, los cuales dan vida a todos los avances tecnológicos de nuestros días, las redes inalámbricas de comunicaciones, los sistemas de comunicación en astronáutica, la televisión y la radio, son algunos ejemplos de ello.

Ley de Inducción de Faraday

En el año de 1831, Michael Faraday reportó la inducción exitosa de corriente eléctrica a partir del magnetismo, en un capítulo de su libro: "On experimental researches in electricity - I", titulado "Induction of electric currents".

Desde ese momento quedó establecida la Ley de Inducción Electromagnética, también llamada Ley de Inducción de Faraday.

De acuerdo con esta ley, en presencia de un campo magnético variable en el tiempo, se induce sobre los materiales conductores una fuerza electromotriz FEM cuya intensidad es proporcional a la variación temporal del flujo magnético.

$$e = \frac{d\phi_m}{dt}$$

Hoy en día, el concepto ha sido ampliado a la variación temporal de los enlazamientos de flujo, entendiendo por enlazamiento de flujo el contacto de una línea de fuerza de campo magnético con un conductor.

Por supuesto, la medida del número de líneas de flujo presentes en un medio es el flujo magnético, por lo que el número de enlazamientos de flujo corresponde al producto del número de conductores enlazados por el flujo magnético, según se observa en la figura 76.

$$\psi = n\phi_m$$

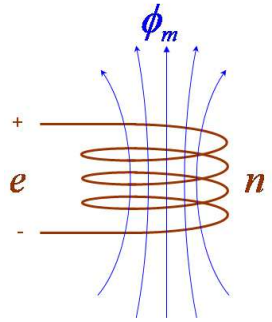


Figura 76. Enlazamientos de flujo de un campo magnético

Un ajuste a la Ley de Inducción de Faraday fue hecho por Lenz,[17] en el año de 1833, quien estableció que la FEM inducida es de tal naturaleza que se opone a la variación de los enlazamientos de flujo que la produjeron.

En estas condiciones, esta FEM trata de oponerse al aumento de los enlazamientos de flujo en un campo creciente, o a la reducción de los mismos en el caso de un campo decreciente.

En estas condiciones, la Ley de Inducción de Faraday, formulada en términos de los enlazamientos de flujo, queda:

$$e = -\frac{d\psi_m}{dt}$$

Cuando se tiene un solo conductor se vuelve a la forma clásica:

$$e = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Para incorporar este nuevo elemento a la formulación del modelo electrostático, se hace necesario entonces considerar la tensión inducida en la llamada Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK).

La sumatoria de voltajes a lo largo de un camino cerrado, incluida la tensión inducida, según la Ley de Inducción de Faraday, es igual a cero.

[17] Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804 - 1865), físico estonio nacido en Tartú.

$$-\oint_C E \cdot dl - \frac{d\phi_m}{dt} = 0$$

Ecuación 50. Ley de Voltajes de Kirchhoff considerando la FEM inducida

A partir de la ecuación 50 se puede deducir una nueva formulación diferencial de la LVK

$$\oint_C E \cdot dl = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Mediante el Teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times E \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt}\int_S B \cdot \vec{dS}$$

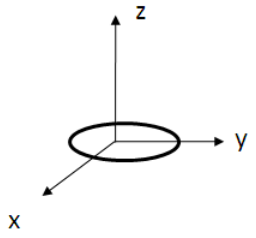
Para que las integrales sean iguales, los integrandos deben serlo, por lo tanto:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

Ecuación 51. Ley de Inducción de Faraday en formulación diferencial

Ejemplo 55. Cálculo de la tensión inducida en una espira.

Una espira conductora circular de 10 cm. de radio se encuentra localizada sobre el plano XY con centro en el origen, como se muestra en la figura.



Si en la región existe un campo magnético variable:

$$B = \sqrt{x^2 + y^2} Cos(\omega t)\, \overrightarrow{a_z} \quad \omega = 10^3 rad/seg$$

Calcule la tensión inducida sobre la espira y la corriente, en el caso de que el alambre conductor tenga una resistencia de 100mΩ/cm.

Solución:

De acuerdo con la Ley de Inducción de Faraday la FEM inducida se puede calcular como:

$$e = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Pero el flujo magnético a su vez es la integral de la densidad de flujo sobre el área de la espira.

$$\Phi_m = \int B \cdot dS$$

Como la espira es circular se pueden usar Coordenadas Cilíndricas para el diferencial de superficie.

$$\overrightarrow{dS} = rdrd\varphi\overrightarrow{a_z}$$

La densidad de flujo en Cilíndricas queda:

$$B = r\ Cos(\omega t)\ \overrightarrow{a_z} \quad \omega = 10^3 rad/seg$$

El flujo magnético queda:

$$\Phi_m = \int_0^{2\pi} \int_0^{10^{-1}} r^2 Cos(\omega t)\, drd\varphi$$

Evaluando

$$\Phi_m = \frac{2\pi}{3} \times 10^{-3} Cos(\omega t)$$

La FEM inducida:

$$e = -\frac{d}{dt}\left(\frac{2\pi}{3} \times 10^{-3} Cos(\omega t)\right)$$

$$e = \frac{2\pi}{3} \times 10^{-3} \omega\ Sen(\omega t)$$

Reemplazando:

$$e = \frac{2\pi}{3}\ Sen(\omega t)$$

La longitud del alambre en cm es:

$$L = 2\pi r = 20\pi\ cm$$

La resistencia eléctrica:

$$R = 0.1\,{}^{\Omega}/_{cm} \times 20\pi\ cm = 2\pi\ \Omega$$

La corriente queda:

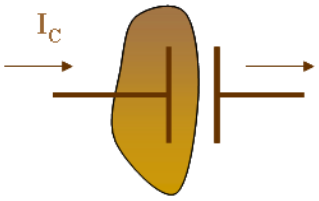
$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{1}{3} Sen(\omega t) \qquad \omega = 10^3\ rad/seg$$

Corriente de desplazamiento

La corriente de desplazamiento, postulada, en 1865, por James Clerk Maxwell, quien formuló su modelo matemático del electromagnetismo.

Maxwell encontró una contradicción en la formulación diferencial de las leyes del electromagnetismo conocidas hasta entonces, mientras pensaba en el problema de flujo de carga eléctrica en el proceso de carga de un condensador.

Maxwell encontró que la ecuación de continuidad de la corriente violaba aparentemente la Ley Circuital de Ampere.



De acuerdo con la ecuación de continuidad:

$$\nabla \bullet J = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

La Ley Circuital de Ampere establece que:

$$\nabla \times H = J$$

Sin embargo, la divergencia del rotacional de un Campo Vectorial es cero, por lo que debería ser:

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = 0$$

Pero en realidad se tiene:

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Lo cual implica que ambas ecuaciones son contradictorias en regiones del espacio en las que exista corriente de convección.

La forma de conciliar esta formulación matemática fue integrar en la ecuación de continuidad una nueva componente proveniente de la Ley de Gauss.

$$\nabla \bullet D = \rho_v \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bullet D) = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Las derivadas temporal y espacial se pueden intercambiar, por lo tanto:

$$\nabla \bullet \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Maxwell reemplazó esta componente en la ecuación de continuidad y la llamó corriente de desplazamiento, así obtuvo un modelo matemático completamente coherente y que correspondía perfectamente con las observaciones.

$$\nabla \bullet J = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} = -\nabla \bullet \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \bullet \left(J + J_d \right) = 0 \qquad J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$$

En estas condiciones, la corriente total es la suma de la corriente de conducción y la de desplazamiento. El modelo entonces quedó completo y era plenamente consistente con las observaciones.

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad Ley\ de\ Ampere$$

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad Ley\ de\ Inducción\ de\ Faraday$$

$$\nabla \bullet E = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \qquad Ley\ de\ Gauss$$

$$\nabla \bullet H = 0$$

Ecuación 52. Ecuaciones electrodinámicas de Maxwell

Ejemplo 56. Cálculo de corriente de desplazamiento en conductores.

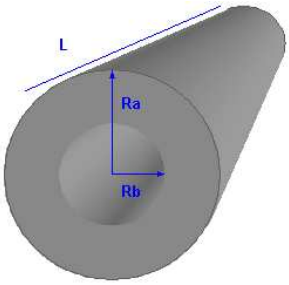
En el cilindro metálico, que se muestra en la figura, transporta una corriente armónica $i(t) = 10Cos(\omega t)\ mA$ en dirección de L (entrando a la página) y que se distribuye de manera uniforme por el conductor.

Calcule el campo eléctrico y el campo magnético en la región $r_b < r < r_a$

Calcule la corriente de desplazamiento en el interior del conductor.

Calcule la relación entre la corriente de desplazamiento y la corriente de conducción.

Suponga que el cilindro está hecho de cobre.



Solución:

Siendo el área efectiva del cilindro: $S = \pi\left(r_a^2 - r_b^2\right)m^2$

La densidad de corriente viene dada por: $j(t) = \frac{10^{-2}}{S} Cos\ \omega t \quad \frac{A}{m^2}\overrightarrow{a_Z}$

Por lo tanto el campo eléctrico viene dado por: $E(t) = \frac{10^{-2}}{\sigma S} Cos\ \omega t \quad \frac{V}{m}\overrightarrow{a_Z}$

La densidad de flujo eléctrico:

$$D(t) = \frac{10^{-2}\varepsilon}{\sigma S} Cos\ \omega t \quad \frac{V}{m}\overrightarrow{a_Z}$$

La densidad de corriente de desplazamiento:

$$j_d(t) = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{10^{-2}\omega\varepsilon}{\sigma S}\left(-Sen\ \omega t\right) \quad \frac{A}{m^2}\overrightarrow{a_Z}$$

La corriente de desplazamiento: $i_d(t) = \frac{10^{-2}\omega\varepsilon}{\sigma}\left(-Sen\ \omega t\right) \quad Amperios\ \overrightarrow{a_Z}$

La relación entre la corriente de desplazamiento y la corriente de conducción es:

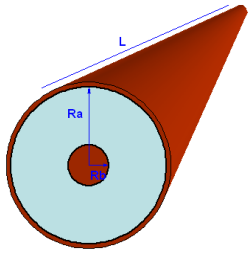
$$\frac{|i_d|}{|i|} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = 9.6\times10^{-16}$$

Ejemplo 57. Cálculo de corriente de desplazamiento en dieléctricos.

Calcule la corriente de desplazamiento por unidad de longitud de un cable coaxial sometido a una diferencia de potencial armónica dada por la $v(t) = 30\,Cos\,\omega t \quad Voltios$ y que utiliza como aislante mica.

Compárela con la corriente de fuga de conducción por unidad de longitud del mismo cable.

Utilice. $R_a = 3mm \quad R_b = 1mm$.



Solución:

Calculamos la función de potencial resolviendo la ecuación de LaPlace en Coordenadas Cilíndricas.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \qquad SA: \quad v(r_a) = 0 \quad v(r_b) = v(t)$$

$$v(r,t) = \frac{v(t)}{Ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} Ln\left(\frac{r_a}{r}\right)$$

$$E(r,t) = \frac{v(t)}{r\,Ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}$$

La densidad de corriente de conducción viene dada por:

$$J_c(r,t) = \frac{\sigma\, v(t)}{r\,Ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}$$

La densidad de corriente de desplazamiento:

$$J_d(r,t) = \frac{\partial D(r,t)}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{r\,Ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \frac{\partial v(t)}{\partial t} = \frac{\omega\varepsilon}{r\,Ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \left(-Sen\,\omega t\right)$$

La relación entre las corrientes queda:

$$\frac{|J_d|}{|J_c|} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$$

Para el aislante de mica a una frecuencia de 1kHz se obtiene una relación:

$$\frac{|J_d|}{|J_c|} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{2\pi f\varepsilon_0}{\sigma} = \frac{2\pi \times 10^3 \times 6 \times 8.85 \times 10^{-12}}{10^{-15}} = 3.33 \times 10^8$$

Corriente en un condensador

La corriente de desplazamiento tiene diferentes propiedades físicas que aparecen cuando un condensador de placas paralelas se excita con un voltaje variante en el tiempo, en este caso, la intensidad de campo eléctrico será aproximadamente igual a la diferencia de potencial dividido entre la distancia que separa las placas si no se toman en cuenta los efectos de borde.

$$E_C(t) = \frac{v_C(t)}{d}$$

La densidad de flujo es proporcional a la intensidad de campo eléctrico, por lo tanto se tiene:

$$D(t) = \varepsilon\, E_C(t) = \frac{\varepsilon}{d} v_C(t)$$

Cuando se calcula la densidad de corriente de desplazamiento se tiene:

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d} \frac{dv_C}{dt}$$

La corriente de desplazamiento se puede calcular como la densidad de corriente integrada sobre el área superficial de las placas.

$$I_d = \int_S \vec{J}_d \cdot \vec{dS} = \frac{\varepsilon\, S}{d} \frac{dv_C}{dt}$$

La capacitancia de un condensador de placas paralelas es una expresión conocida.

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

Por lo tanto, la corriente que circula por el condensador queda:

$$I_d = C\frac{dv_C}{dt}$$

En un condensador ideal, la corriente que circula es en su totalidad de desplazamiento.

Cuando la señal de excitación es una señal armónica, surgen otras propiedades interesantes.

$$v_C(t) = V_0\ Sen\,\omega t \quad V$$

$$I_d = C\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow I_d = \omega V_0 C\ Cos\left(\omega t\right)$$

Al aplicar identidades trigonométricas se encuentra una relación de fase.

$$Cos\left(x\right) = Sen\left(x + 90^0\right)$$

$$I_d = \omega V_0 C\ Sen\left(\omega t + 90^0\right)$$

La corriente de desplazamiento adelanta 90º a la diferencia de potencial aplicado.

Sin embargo, cuando el dieléctrico no es ideal, presenta una conductividad diferente de cero y, en consecuencia, existe adicionalmente una densidad de corriente de conducción asociada.

$$J = \sigma E$$

La corriente de conducción se calcula igual que en el caso anterior.

$$I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{dS} = \frac{\sigma S}{d}v_C\left(t\right) = \frac{\sigma S}{d}V_0\ Sen\,\omega t$$

Como se ve claramente, la corriente de conducción se encuentra en fase con la diferencia de potencial aplicado.

Modelo de un condensador real[18]

A partir de la Ley Circuital de Ampere, se deduce que la corriente de desplazamiento permite crear campos magnéticos, aun en ausencia de la corriente de conducción.

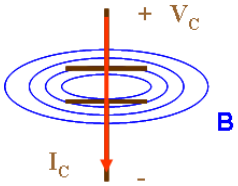
$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

En el caso J=0, se cumple que:

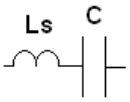
$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

De acuerdo con esta ecuación, la corriente de desplazamiento puede crear un campo magnético que se encuentra arrollado a su alrededor.

En el caso de un condensador de placas paralelas, el campo magnético creado por la corriente de desplazamiento se enrolla alrededor de las placas, como lo muestra la siguiente figura.



Como los conductores que forman las placas del condensador se encuentran inmersos en el campo magnético variable, se presenta auto inductancia, la cual se puede modelar mediante una inductancia en serie con el condensador ideal.



Este sistema bobina condensador forma otro sistema resonante serie, el cual tiene una frecuencia de resonancia característica igual a:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C}}$$

[18] Cuando se habla de condensador "real", se debe advertir que en este modelo no se han tomado en cuenta otros fenómenos que afectan el desempeño real del condensador, como las pérdidas por histéresis dieléctrica, los cambios producidos en los parámetros del modelo causados por la frecuencia o la intensidad de la señal de excitación, entre otros, los cuales se encuentran fuera del alcance del presente texto.

Dependiendo de las características constructivas del condensador, esta frecuencia de resonancia se encuentra usualmente por encima de los 100MHz.

La resistencia propia de los conductores que forman las placas se puede representar por una resistencia en serie con el sistema, y la resistencia de fuga del dieléctrico se puede modelar en paralelo con el condensador.

El modelo completo del condensador se muestra en la figura 77.

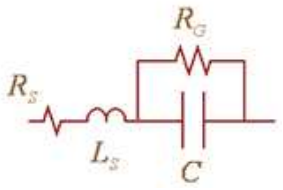


Figura 77. Modelo de un condensador real

La impedancia equivalente del condensador de acuerdo con el modelo planteado y la teoría básica de circuitos es:

$$Z(s) = (R_s + L_s s) + \left[R_G \parallel \left(\frac{1}{sC}\right)\right]$$

Resolviendo queda:

$$Z(s) = (R_s + L_s s) + \frac{R_G \times \frac{1}{sC}}{R_G + \frac{1}{sC}}$$

Simplificando:

$$Z(s) = (R_s + L_s s) + \frac{R_G}{CR_G s + 1}$$

Resolviendo la suma:

$$Z(s) = \frac{R_G + R_s + L_s s + LsCR_G L_s s^2 + CR_G R_s s}{CR_G s + 1}$$

Dividiendo el numerador y denominador por R_G.

$$Z(s) = R_G \frac{\left(1 + \frac{R_s}{R_G}\right) + \left(\frac{L_s}{R_G} + CR_s\right) s + L_s C s^2}{CR_G s + 1}$$

Ecuación 53. Impedancia equivalente de un condensador real

Un valor aproximado de la impedancia del condensador, que toma en cuenta que la resistencia en paralelo es mucho mayor que la resistencia serie, puede describirse como se ve en la ecuación 54.

$$Z(s) = R_G \frac{1 + CR_s s + L_s C s^2}{CR_G s + 1}$$

Ecuación 54. Impedancia equivalente aproximada de un condensador real

La impedancia de un condensador depende de la frecuencia de operación y puede tener diferentes tipos de comportamiento de acuerdo con la señal aplicada. En la figura se muestra una gráfica de variación de impedancia para un condensador de 10uF tomando como valores típicos de los parámetros:

$$R_G = 100M\Omega \qquad L_s = 0.1uH \quad R_s = 1m\Omega$$

Como se puede apreciar en la figura 78, la impedancia del condensador a muy bajas frecuencias (<0.1Hz), es equivalente a la resistencia en paralelo de valor R_G con un ángulo de cero grados.

A medida que la frecuencia se incrementa (>0.1Hz), tiende a la impedancia de un condensador ideal, es decir, una impedancia que se reduce con los incrementos de frecuencia y cuyo ángulo asociado es de 90º en adelanto.

Sin embargo, al pasar de la frecuencia de resonancia (10^2KHz), la impedancia empieza a comportarse como una inductancia, es decir, la magnitud de la impedancia se incrementa en forma proporcional a la frecuencia y presenta un ángulo de 90º en atraso.

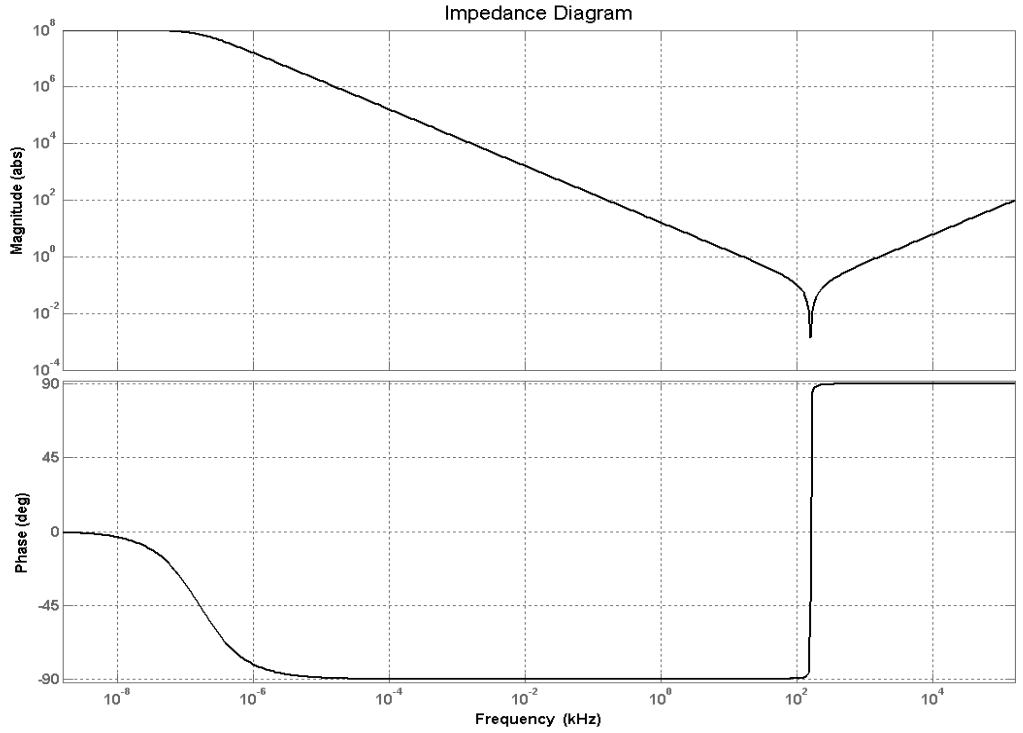


Figura 78. Respuesta en frecuencia de la impedancia de un condensador real

El mismo componente discreto, por lo tanto, tiene triple identidad, condensador, resistencia o inductancia, dependiendo del rango de frecuencia en el que opere el circuito.

Ejemplo 58. Cálculo de la impedancia real de un condensador comercial.

En un condensador comercial se encuentran las siguientes especificaciones:

$$C = 10pF \quad f_0 = 4GHz \quad R_s = 1\Omega \quad R_G = 200M\Omega$$

Calcule la impedancia a 1.5GHz y a 10GHz.

Solución:

Se calcula el parámetro de inductancia serie con base en la frecuencia de resonancia:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C}}$$

$$L_s = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$$

$$L_s = \frac{1}{4\pi^2 \times 16 \times 10^{18} \times 10 \times 10^{-12}} \cong 160pH$$

Se calcula la impedancia haciendo $s \to j\omega$:

$$Z(s) = R_G \frac{1 + CR_s s + L_s C s^2}{CR_G s + 1}$$

Para f=1.5GHz:

$$Z(1.5GHz) = (1 - j9)\ \Omega$$

Todavía se comporta como condensador.

Para f=10GHz.

$$Z(10GHz) = (1 + j8.5)\ \Omega$$

En esta frecuencia se comporta como inductor.

Es importante, buscar en las hojas de especificaciones de los condensadores, la frecuencia de resonancia. En la cual se muestran unos valores de referencia para la frecuencia de resonancia de condensadores comerciales en función de la capacitancia en pico-faradios, como se puede apreciar, la tendencia es linealmente decreciente en escala logarítmica por lo que los condensadores de mayor capacitancia tienen una frecuencia de resonancia menor, del orden de unos pocos MHz.

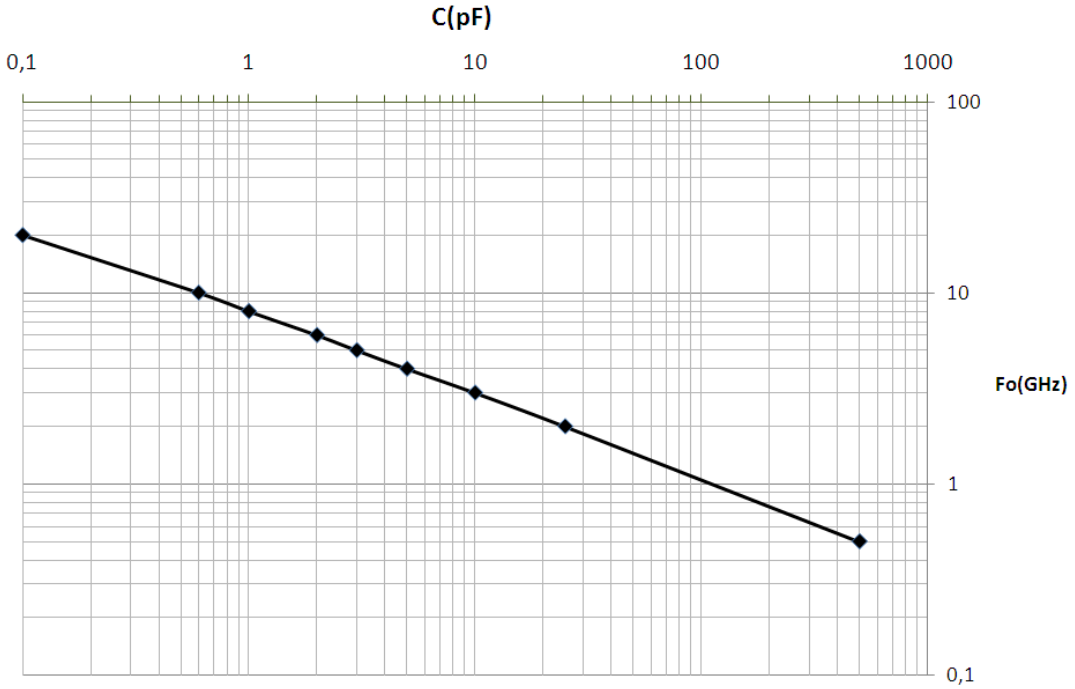


Figura 79. Frecuencia de resonancia de referencia para condensadores comerciales en RF

La tendencia lineal que aproxima la frecuencia de resonancia es:

$$Log_{10}[f_0(GHz)] = -0.435 \times Log_{10}[C(pF)] + 0.899$$

Ejemplo 59. Aproximación de la frecuencia de resonancia de un condensador real.

Aproxime la frecuencia de resonancia y la inductancia serie de un condensador comercial de 10uF.

Solución:

Se pasa la capacitancia a pF:

$$C = 10\mu F \times \frac{10^6 pF}{1\mu F} = 10^7 pF$$

$$Log_{10}[f_0(GHz)] = -0.435 \times Log_{10}[10^7] + 0.899 = -2.1$$

Por lo tanto:

$$f_0 = 10^{-2.1} GHz \cong 8MHz$$

Tangente de pérdidas de un medio

La relación entre la corriente de conducción y la de desplazamiento en un medio específico es constante $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ cuyo valor depende de los parámetros del medio y de la frecuencia de la señal aplicada. La corriente total que circula por el medio es la suma vectorial de las dos componentes, según se muestra en la figura 80.

Adicionalmente, entre la corriente de desplazamiento y la de conducción existe un ángulo de desfase de 90º, tal como se muestra en la figura 80.

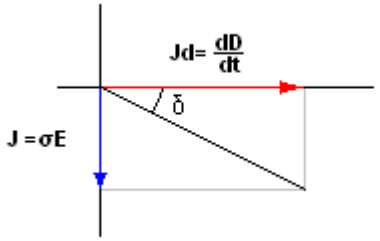


Figura 80. Diagrama fasorial de un dieléctrico con pérdidas

Esta relación se denomina tangente de pérdidas y es una característica del medio, en los materiales conductores tiende a ser muy alta ($Tan(\delta) \to \infty$) ya que la corriente de conducción es mucho más importante que la de desplazamiento; mientras en medios dieléctricos el comportamiento es contrario, por lo que la tangente de pérdidas tiende a ser pequeña ($Tan(\delta) \to 0$) .[19]

En la tabla 10, se muestran los valores de referencia para el cálculo de la tangente de pérdidas de diferentes medios físicos.

Tabla 10. Valores de referencia para el cálculo de la tangente de pérdidas para diferentes medios físicos

Materiales	σ(S/m)	εr
Cobre	5,80E+07	1
Aluminio	3,82E+07	1
Agua de Mar	4	80
Suelo vegetal	1,00E-02	14
Suelo seco	1,00E-04	3
Agua dulce	1,00E-03	80

[19] La tangente de pérdidas es siempre positiva y da origen a ángulos δ que varían entre cero grados para dieléctricos perfectos y noventa grados para superconductores.

Ejemplo 60. Cálculo de la tangente de pérdidas de un medio.

Calcule la tangente de pérdidas del suelo seco a una frecuencia de 10kHz. Calcule de nuevo a 100MHz.

Solución:

Los parámetros del suelo seco son: $\sigma = 10^{-4}\frac{Sm}{m}\ \ \epsilon_r = 3$

La tangente de pérdidas a 10kHz:

$$Tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-4}}{2\pi \times 10^4 \times 3 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 60$$

Lo cual da un ángulo de pérdidas de:

$$\delta = Tan^{-1}(60) = 89^0$$

Cuando se cambia la frecuencia a 100MHz, se obtiene:

$$Tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-4}}{2\pi \times 10^8 \times 3 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 0.006$$

Lo cual da un ángulo de pérdidas de:

$$\delta = Tan^{-1}(0.006) = 0.3^0$$

El valor de la tangente de pérdidas es una medida de la calidad de un aislamiento, entre menor sea la corriente de conducción comparada con la corriente de desplazamiento mejor es la calidad del aislamiento eléctrico; la norma IEEE 400-2001,[20] ilustra los elementos básicos que se deben tener en cuenta al evaluar la calidad del aislamiento de cables de potencia a través de la tangente de pérdidas.

Para efectos prácticos, la tangente de pérdidas se conoce también como tangente delta o factor de disipación y la corriente de desplazamiento como corriente de polarización. Los cambios en la tangente delta de un cable a medida que pasa el tiempo o cuando se mide a diferentes voltajes, se interpretan como envejecimiento o deterioro del aislamiento, obligando a su cambio o reposición.

[20] IEEE STD 400 2001 - Guide for Field Testing and Evaluation of the Insulation of Shielded Power Cable Systems Rated 5 kV and Above.

Clasificación de medios según la tangente de pérdidas

Como se puede observar en la figura 80, entre mayor sea el ángulo de pérdidas mayor va a ser la componente de corriente de conducción frente a la corriente de polarización o desplazamiento, es decir, más conductor es el medio.

Esta observación hace que se pueda establecer una clasificación básica para medios con base en la tangente de pérdidas de la siguiente forma:

- **Dieléctricos perfectos**: no presentan corriente de conducción, por lo tanto, no poseen pérdidas por efecto Joule. $Tan(\delta) = 0 \quad \delta = 0$.
- **Conductores perfectos**: no presentan corriente de polarización, por lo tanto, no poseen efectos capacitivos o de acumulación de carga. $Tan(\delta) \to \infty \quad \delta = \frac{\pi}{2}$.
- **Buenos aislantes**: presentan corriente de conducción y poseen pérdidas por efecto Joule, pero este efecto es casi despreciable frente al efecto capacitivo, se denominan también "dieléctricos de bajas pérdidas". $Tan(\delta) \to 0^+ \quad \delta \to 0^+$.
- **Buenos conductores**: presentan corriente de polarización, por lo tanto, poseen efectos capacitivos o de acumulación de carga, pero es mucho más significativa la corriente de conducción y las pérdidas por efecto Joule. $Tan(\delta) \to \infty \quad \delta \to \frac{\pi}{2}$.
- **Dieléctricos disipativos**: presentan ambos efectos y ninguno es despreciable frente al otro. $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

La tangente delta en escala logarítmica se puede expresar como:

$$Tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

Obteniendo el logaritmo en ambos lados se tiene:

$$Log[Tan(\delta)] = Log\left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]$$

Equivalente a:

$$Log[Tan(\delta)] = Log\left(\frac{\sigma}{2\pi\epsilon}\right) - Log(f)$$

Esta función en escala logarítmica es equivalente a una función de la forma:

$$y = A - x$$

Donde:

$$y = Log[Tan(\delta)] \quad A = Log\left(\frac{\sigma}{2\pi\epsilon}\right) \quad x = Log(f)$$

Esto significa que en escala logarítmica, la tangente de pérdidas tiene un comportamiento lineal con respecto a la frecuencia, como se aprecian en la figura 81, en donde se ha graficado la tangente delta en función de la frecuencia en escala logarítmica.

El intercepto con el eje Y depende del medio, pero la pendiente es constante e igual a -1. Como se puede apreciar, el mismo medio puede tener diferentes comportamientos dependiendo de la frecuencia, pasando por buen aislante, dieléctrico disipativo o buen conductor.

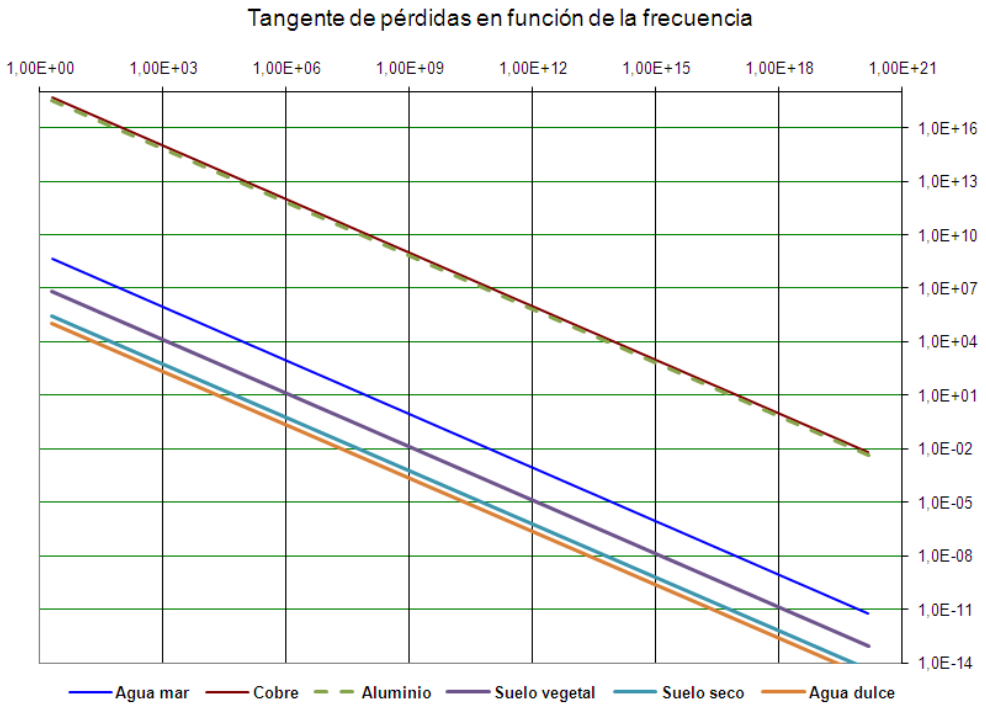


Figura 81. Tangente de pérdidas para diferentes medios evaluada en función de la frecuencia

Los valores de referencia para los casos anteriormente tratados son:

Buen conductor: $Tan(\delta) \geq 10 \quad \delta \geq 84^0$.

Buen aislante: $Tan(\delta) < 0.01 \quad \delta \geq 0.6^0$.[21]

Dieléctricos disipativos: $0.01 < Tan(\delta) < 10 \quad 0.6^0 < \delta < 84^0$.

[21] En cables de alta tensión este valor debe ser inferior a 0.001 para ser considerado un dieléctrico de buena calidad.

Ejemplo 61. Clasificación de medios según la tangente delta.

Un aislante desconocido tiene una tangente de pérdidas de 0.1 medida a 100Hz. ¿Cuál es el valor de la tangente delta a 100kHz y cómo se puede clasificar?

Solución:

Se calcula el valor de la constante A para el medio dado:

$$Log[Tan(\delta)] = A - Log(f)$$

$$Log[0.1] = A - Log(100)$$

$$-10 = A - 2$$

$$A = -8$$

Se aproxima el valor a 100kHz:

$$Log[Tan(\delta)] = -8 - Log(10^5)$$

$$Log[Tan(\delta)] = -8 - 5 = -13$$

$$Tan(\delta) = 10^{-13} \quad \Rightarrow \delta \to 0$$

De acuerdo con los criterios de clasificación, el material a 100Hz es un dieléctrico disipativo, mientras a 100kHz se comporta como un buen aislante o dieléctrico de bajas pérdidas.

Ondas electromagnéticas en dieléctricos perfectos

Las ecuaciones de Maxwell dan origen a soluciones armónicas las cuales fueron encontradas por primera vez por James Clerck Maxwell, en 1884. Basado en dichas soluciones Maxwell predijo la existencia de ondas electromagnéticas y descubrió que se puede transmitir señales a largas distancias sin haber, necesariamente, medios físicos para la transmisión.

En el año de 1887, Einrich Hertz descubrió las ondas predichas por Maxwell y demostró que la electricidad puede transmitirse en forma de ondas electromagnéticas, las cuales se propagan a la velocidad de la luz y tienen además muchas de sus propiedades.

Este es el principio de la telefonía inalámbrica, la radio, la TV, la telemetría, entre otras múltiples maravillas de la vida moderna.

Es posible encontrar ecuaciones que describen el comportamiento de campos en el espacio libre en ausencia de carga volumétrica o de corrientes eléctricas de conducción, en estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell se reducen, según como aparece en la ecuación 55.

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$
$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$
$$\nabla \bullet E = 0$$
$$\nabla \bullet H = 0$$

Ecuación 55. Ecuaciones de Maxwell en medios sin pérdidas

De acuerdo con estas ecuaciones, se pueden observar los siguientes fenómenos físicos:

- Un campo eléctrico variante en el tiempo es capaz de generar en su entorno una corriente de desplazamiento, la cual da origen a un campo magnético que se arrolla a su alrededor.

- Este campo magnético, depende también del tiempo por lo que está capacitado para generar un campo eléctrico arrollado a su alrededor.

- Si el campo original E cambia de forma armónica, lo que se tiene es un conjunto de campos eléctrico y magnético que varían de forma armónica y se crean mutuamente siendo ambos perpendiculares entre sí.

Matemáticamente, la solución propuesta por Maxwell puede esquematizarse de la siguiente manera.

A partir de la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \bullet E) - \nabla^2 E$$

En un medio con ausencia de carga libre:

$$\nabla \bullet E = 0$$

Por lo tanto:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\nabla^2 E$$

De las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times E == -\mu \nabla \times \left[\frac{\partial}{\partial t}(H) \right]$$

Las derivadas espaciales y temporales se pueden intercambiar:

$$\nabla \times \nabla \times E == -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times H)$$

Reemplazando:

$$-\nabla^2 E == -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times H\right)$$

Se reemplaza el rotacional del campo magnético en un medio sin corriente de conducción:

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 E = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)$$

Simplificando:

$$\nabla^2 E = \mu \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

Cuando se aplica la Ley de Gauss $D = \epsilon E$:

$$\nabla^2 E = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Este tipo de ecuación diferencial da origen a una ecuación diferencial compleja, si se resuelve en Coordenadas Cartesianas por ejemplo, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Ecuación 56. Ecuación diferencial de onda electromagnética

Esta ecuación base es llamada ecuación de onda electromagnética porque su solución viene dada por un tipo de onda armónica de variación en el tiempo y el espacio.

Para efectos de simplificar la solución, se supone una variación del campo eléctrico ubicado en dirección al eje **Y,** que presenta variación únicamente en el eje **X**, con lo que se tiene una ecuación diferencial del tipo.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Esta es una ecuación diferencial en la cual, la segunda derivada espacial del campo E es directamente proporcional a su segunda derivada temporal. El único caso en que esto ocurre es en una variación exponencial combinada de **E** con respecto al tiempo y el espacio:

$$E_y(x,t) = E_{xo} e^{-j\omega t} e^{\gamma x} \overrightarrow{a_y}$$

La solución de esta ecuación se puede obtener como:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \gamma^2 E_y(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = (j\omega)^2 E_y(x,t)$$

Reemplazando:

$$\gamma^2 E_y(x,t) = \mu\epsilon(j\omega)^2 E_y(x,t)$$

Por lo tanto:

$$\gamma^2 = \mu\epsilon(j\omega)^2$$

$$\gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

La solución completa de la ecuación diferencial queda:

$$E_y(x,t) = E_{xo} e^{-j\omega t} e^{\pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}x}\,\overrightarrow{a_y}$$

Esta solución es una exponencial compleja, la cual se puede reagrupar como:

$$E_y(x,t) = E_{xo} e^{j\omega(t\pm\sqrt{\mu\epsilon}x)}\,\overrightarrow{a_y}$$

De acuerdo con el teorema de Euler:

$$e^{-j\theta} = Cos\theta - jSen\theta$$

$$e^{j\theta} = Cos\theta + jSen\theta$$

Por lo que se puede obtener:

$$Cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{-j\theta} + e^{j\theta}\right)$$

Es decir que una combinación lineal de dos exponenciales complejas da origen a una señal armónica senoidal.

Por el principio de combinación lineal de soluciones de ecuaciones diferenciales, que establece que:

> *"Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de una ecuación diferencial, entonces cualquier combinación $y = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, será también solución de la ecuación":*

Se tiene entonces que la solución final para el campo eléctrico debe ser de la forma:

$$E_y(x,t) = E_{xo} Cos\left(\omega t - \omega\sqrt{\mu\epsilon}x\right)\overrightarrow{a_y}$$

Como el campo eléctrico es de variación armónica, se puede suponer, sin ningún error, que el campo magnético H también lo es, por lo que el campo **H** se puede expresar como:

$$H = H_0 e^{-j\omega t}$$

Dado que el rotacional de **E** es proporcional a la primera derivada de **H** con respecto al tiempo, para una variación armónica resulta:

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} = j\omega\mu H$$

Evaluando el rotacional de **E**:

$$\nabla \times E = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_x} & \overrightarrow{a_y} & \overrightarrow{a_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y(x,t) & 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\nabla \times E = \frac{\partial}{\partial x} E_y(x,t)\, \overrightarrow{a_z}$$

Reemplazando

$$j\omega\mu H = \frac{\partial}{\partial x} E_y(x,t)\, \overrightarrow{a_z}$$

Por lo tanto:

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_y(x,t)\, \overrightarrow{a_z}$$

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_{xo} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)}\, \overrightarrow{a_z}$$

Aplicando la derivada:

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} \times j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\, E_{xo} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)}\, \overrightarrow{a_z}$$

De donde se obtiene:

$$H = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\, E_{xo} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)}\, \overrightarrow{a_z}$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$H = H_{xo} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)}\, \overrightarrow{a_z}$$

Donde:

$$H_{xo} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} E_{xo}$$

Por el mismo principio de superposición de soluciones, la ecuación para el campo magnético queda:

$$H(x,t) = H_{xo} Cos\left(\omega t - \omega\sqrt{\mu\epsilon}x\right) \overrightarrow{a_z}$$

Como se observa claramente, un campo eléctrico de variación armónica en dirección **Y**, genera un campo magnético de variación igualmente armónica en dirección **Z**. Los dos campos representan una onda viajera en dirección X, encontrándose en fase espacial y temporal como se muestra en la figura 82.

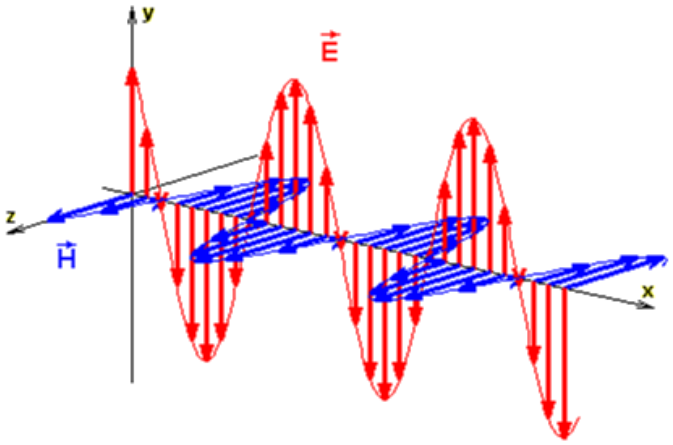


Figura 82. Onda electromagnética viajera en dirección **X**[22]

La onda mostrada en la figura 82 recibe el nombre de electromagnética por ser originada por dos campos eléctrico y magnético mutuamente perpendiculares, que se propagan en una dirección perpendicular a ambos. La dirección de propagación de una onda electromagnética en general se encuentra señalada por un vector **S**, que apunta según la ley de la mano derecha:

$$S = E \times H$$

Los tres vectores forman un sistema ortogonal, como el que se muestra en la figura 83.

[22] Figura obtenida de una simulación encontrada en el sitio web del profesor Walter Fendt: http://www.walter-fendt.de/ph11s/emwave_s.htm

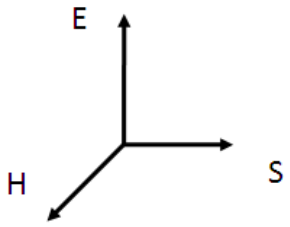


Figura 83. Dirección de propagación de una onda electromagnética

Impedancia intrínseca

La impedancia intrínseca de un medio es la relación entre la magnitud del campo eléctrico y la magnitud del campo magnético asociado a la onda.

La impedancia intrínseca de representa mediante la letra griega eta (**η**) y tiene unidades de Ohmio, según el siguiente análisis dimensional:

$$\eta = \frac{E}{H} = \frac{V/m}{A/m} = \frac{V}{A} = \Omega$$

En el caso de un dieléctrico perfecto, la impedancia intrínseca queda:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Ecuación 57. Impedancia intrínseca de un medio sin pérdidas

La impedancia intrínseca del vacío es una constante universal cuyo valor está definido por:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Reemplazando:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} H/m}{\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}} = 120\pi\Omega$$

En el caso de dieléctricos perfectos no magnéticos la impedancia intrínseca es:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

Por lo tanto:

$$\eta = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}}\ \Omega$$

Velocidad de propagación

La velocidad de propagación puede medirse como el tiempo necesario para que en un mismo punto del espacio se presente nuevamente un cruce por cero o un máximo de la señal.

Esta condición se satisface siempre que:

$$\omega t - \omega x\sqrt{\mu\varepsilon} = k$$

De donde se deduce que:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t - \frac{1}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}k$$

Derivando el desplazamiento con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c$$

Que es la velocidad de desplazamiento de la onda, conocida también como velocidad de fase.

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Ecuación 58. Velocidad de fase de una onda electromagnética en un medio no disipativo

La velocidad de fase de las ondas electromagnéticas depende exclusivamente de las propiedades electromagnéticas del medio en donde se propagan y no del desplazamiento relativo entre observadores, lo cual viola claramente las leyes de la mecánica conocidas. Esta observación dio origen al la llamada teoría especial de la relatividad, cuyo enunciado fundamental se publicó, en el año de 1905, por parte de Albert Einstein.

La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es una constante universal cuyo valor es de:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

Reemplazando:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} H/m \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}} = 3 \times 10^8 \; m/s$$

Esta constante resultó ser idéntica a la velocidad de la luz, que había sido medida de diferentes formas por muchos investigadores. Por lo tanto, se concluyó que la luz tenía naturaleza electromagnética.

Dado que la mínima permitividad eléctrica es la del vacío y, en la mayoría de los casos, la permeabilidad magnética relativa es superior a la unidad, la velocidad de las señales electromagnéticas es menor en cualquier medio, que en el vacío.

En el caso de dieléctricos perfectos no magnéticos la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}}$$

Por lo tanto:

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Ejemplo 62. Características de medios dieléctricos perfectos no magnéticos.

Una señal electromagnética de amplitud $E_0 = 120V/m$ se propaga a través de un dieléctrico perfecto no magnético cuya permitividad relativa es 8.

¿Cuál es la velocidad de fase y la impedancia intrínseca del medio? ¿Cuál es la amplitud del campo magnético asociado a la onda?

Solución:

La velocidad de fase para un dieléctrico perfecto no magnético viene dada por:

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Reemplazando:

$$v_p = \frac{3 \times 10^8 m/s}{\sqrt{8}} = 106 \times 10^6 \; m/s$$

La impedancia intrínseca:

$$\eta = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \; \Omega$$

Reemplazando:

$$\eta = \frac{120\pi}{\sqrt{8}} = 133.3\Omega$$

La amplitud del campo magnético asociado es:

$$|H| = \frac{|E|}{|\eta|} = \frac{120V/m}{133.3\Omega} = 900\ mA/m$$

Índice de refracción

El índice de refracción de una sustancia es la relación existente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de fase de una señal electromagnética en un medio específico. Se representa mediante la letra **n**.

$$n = \frac{c_0}{v_p}$$

Debido a que la velocidad de fase en cualquier medio es menor que la velocidad de la luz en el vacío, el índice de refracción de una sustancia es siempre una cantidad mayor o igual que 1.

En el caso de dieléctricos perfectos no magnéticos, el índice de refracción queda:

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \frac{c_0}{c_0/\sqrt{\epsilon_r}}$$

Por lo tanto:

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

En la tabla 11, se muestran los índices de refracción de algunas sustancias de uso común.

Tabla 11. Índices de refracción de algunas sustancias

Medio	Índice de refracción
Aire	1.00029
Agua	1.3333
Vidrio común	1.52
Glicerina	1.473
Diamante	2.42
Metanol	1.329

El inverso del índice de refracción es también un parámetro característico de los diferentes medios de propagación y se denomina factor de velocidad:

$$f_v = \frac{1}{n}$$

De acuerdo con la definición del índice de refracción se tiene:

$$f_v = \frac{v_p}{c_0}$$

Es decir, el factor de velocidad es la velocidad de fase en un medio comparada con la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, es un número siempre igual o menor que 1.

Ejemplo 63. Cálculo de la permitividad a partir del índice de refracción.

Calcule la permitividad relativa y la impedancia intrínseca de la glicerina.

Solución:

Dado que la glicerina es un medio no magnético, el índice de refracción viene dado por:

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

Por lo tanto:

$$\epsilon_r = n^2$$

Se toma el valor de la tabla 11.

$$\epsilon_r = 1.473^2 = 2.17$$

Constante de fase

La constante que acompaña el desplazamiento de fase de la onda con respecto a la distancia se conoce como constante de fase β:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

En el análisis dimensional resulta que:

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = m/s$$

De donde:

$$\beta = \frac{rad/_s}{m/s} = rad/_m$$

La constante de fase representa la ganancia de fase en radianes que se obtiene por cada unidad de longitud que recorre la onda.

Longitud de onda

Para un tiempo constante, los puntos del espacio que tienen igual magnitud de campo se encuentran separados por una distancia tal que la ganancia de fase sea equivalente a 2π radianes:

$$\omega\left(t - x_1\sqrt{\mu\varepsilon}\right) - \omega\left(t - x_2\sqrt{\mu\varepsilon}\right) = 2\pi$$

Reduciendo:

$$\omega\left(x_2 - x_1\right)\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi$$

La distancia entre los dos puntos de la misma fase es igual a una longitud de onda, por tanto:

$$x_2 - x_1 = \lambda$$

$$\omega\,\lambda\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{\beta}$$

Por otra parte:

$$\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{2\pi\, f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

En función de la velocidad de fase:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} \quad \Rightarrow \quad v_p = \lambda\, f$$

Ejemplo 64. Longitud de onda de una señal electromagnética.

Calcule la longitud de onda de una onda electromagnética de 100KHz que se propaga en:
a) Vacío. b) Glicerina.

Solución:

a) Cuando la onda se propaga en el vacío:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{100 \times 10^3 seg^{-1}} = 3km$$

b) Cuando la onda se propaga en glicerina:

El índice de refracción de la glicerina es: $n = 1.473$

La velocidad de fase queda:

$$v_p = \frac{c_0}{n} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{1.473} = 203.7 \times 10^6\ m/s$$

La longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{203.7 \times 10^6 m/s}{100 \times 10^3 seg^{-1}} = 2037m$$

Para los dieléctricos perfectos no magnéticos, la longitud de onda se puede expresar en función de la longitud de onda del vacío y el índice de refracción.

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{nf}$$

La longitud de onda en el vacío es:

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

Por lo tanto:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Lo cual significa que la longitud de onda es menor en cualquier medio que en el vacío.

Ondas electromagnéticas en medios disipativos

Son medios disipativos aquellos que presentan pérdida de energía por calentamiento, es decir, efecto Joule.

Para que existan pérdidas pro efecto Joule, es necesario que la conductividad del medio sea diferente de cero, por lo que es necesario tomar en cuenta la componente de corriente de conducción en la solución de la ecuación de onda.

La ecuación del rotacional del campo magnético queda:

$$\nabla \times H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

Ecuación que involucra la componente de corriente de conducción.

Para una solución armónica, igual al caso anterior:

$$\nabla \times H = (\sigma + j\omega\varepsilon)E$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)E_y$$

En este caso, la solución para el campo puede ser tomada como:

$$E_y(x) = E_{xo}e^{\gamma x} \quad ; \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

La solución completa en función del tiempo y la distancia queda:

$$E_y(x,t) = E_{xo}e^{-\alpha x}e^{-j\omega t}e^{\pm j\beta x}\,\overrightarrow{a_y}$$

La constante γ es la raíz cuadrada de un número complejo que se obtiene matemáticamente como:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(-1 + j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2}$$

Ecuación 59. Constante de propagación en un medio con pérdidas

La constante γ en función de la tangente de pérdidas se puede expresar como:

$$|\gamma| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon(1 + \tan^2\delta)^{\frac{1}{2}}} \qquad \gamma = |\gamma| \begin{cases} 90^0 - \delta/2 \\ 270^0 - \delta/2 \end{cases}$$

Las dos soluciones en el plano cartesiano se muestran en la figura 84.

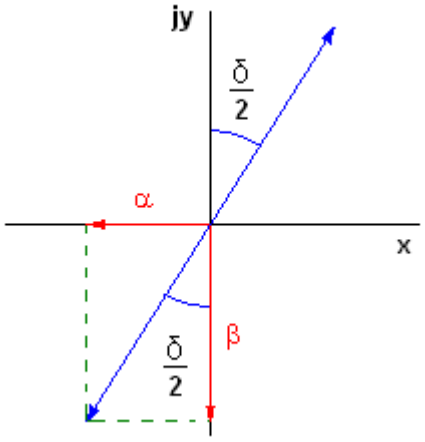


Figura 84. Solución gráfica de la ecuación 59

Las constantes α y β se calculan como:

$$\alpha = -|\gamma| Sen\left(\frac{\delta}{2}\right) \qquad \beta = -|\gamma| Cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Por tanto, la solución para el campo **E** que cambia en el tiempo y en el espacio es:

$$\overrightarrow{E_y}(x,t) = E_{xo} e^{-\alpha x} Cos\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} x\right)\right] \quad \overrightarrow{a_y}$$

Como se puede apreciar en la solución completa, la constante α está relacionada con una atenuación de la amplitud de la onda en función de la distancia; mientras la constante β se relaciona con la ganancia de fase en función de la distancia.

Éstas reciben el nombre de constante de atenuación y constante de fase, respectivamente.

La constante de fase se mide en radianes por unidad de longitud, mientras la constante de atenuación lo hace en unidades inversas a la unidad de longitud.

Dado que la unidad m^{-1}, no existe formalmente en el SI, se le ha asignado una unidad adimensional denominada Nieper a la constante de atenuación, con lo cual su valor se expresa en Np/m.

Ejemplo 65. Constantes de propagación en un dieléctrico con pérdidas.

Un medio dieléctrico no magnético tiene una conductividad de 10^{-2}Sm/m y una permitividad relativa de 3.5. Calcule las constantes de propagación para una onda de 100kHz que se propaga por este medio.

Solución:

Se calcula la constante de propagación γ:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^5 \frac{rad}{seg} \quad \mu = \mu_0 \quad \epsilon = 3.5\epsilon_0$$

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \times 10^5 \times 4\pi \times 10^{-7}\left(10^{-2} + j2\pi \times 10^5 \times 3.5 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right)}$$

Evaluando:

$$\gamma = \sqrt{j0.08\pi^2\left(10^{-2} + j\frac{3.5}{18}\times 10^{-4}\right)}$$

$$\gamma = 0.0628 \; + \; 0.0629i = 0.089\langle 45^0\rangle$$

La constante de atenuación:

$$\alpha = 0.0628\ Np/m$$

La constante de fase:

$$\beta = 0.0629\ rad/m$$

Velocidad de propagación

La velocidad de propagación se calcula igual que en el caso de un dieléctrico sin pérdidas, cuando se satisface la condición de que la fase permanezca constante:

$$t - \frac{\beta}{\omega}x = k$$

De donde se deduce:

$$x = \frac{\omega}{\beta}(t - k)$$

La derivada del desplazamiento da como resultado la velocidad de fase:

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

Ecuación 60. Velocidad de propagación en dieléctrico disipativo

Ejemplo 66. Velocidad de propagación en un dieléctrico con pérdidas.

Un medio dieléctrico no magnético tiene una conductividad de 10^{-2}Sm/m y una permitividad relativa de 3.5. Calcule la velocidad de propagación, el índice de refracción y la ganancia de fase cuando la onda se desplaza 10m dentro del medio.

Solución:

Se calcula la constante de propagación γ:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^5 \frac{rad}{seg} \quad \mu = \mu_0 \quad \epsilon = 3.5\epsilon_0$$

Reemplazando se obtiene:

$$\gamma = 0.0628 + 0.0629i = 0.089\langle 45^0 \rangle$$

La constante de atenuación:

$$\alpha = 0.0628\ Np/m$$

La constante de fase:

$$\beta = 0.0629\ rad/m$$

La velocidad de propagación es:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^5 \frac{rad}{seg}}{0.0629 \frac{rad}{m}} = 10^7 m/s$$

El índice de refracción:

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{10^7 m/s} = 30$$

La ganancia de fase:

$$\Delta\varphi = \beta x = 0.0629 \frac{rad}{m} \times 10m = 0.629\ rad$$

$$\Delta\varphi = 0.629\ rad \times \frac{180^0}{\pi\ rad} = 36^0$$

Impedancia intrínseca

La impedancia intrínseca también debe tomar en cuenta la componente de conductividad, por lo que la ecuación cambia a:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = x + j\,y$$

La impedancia intrínseca es, por lo tanto, un número complejo, que se puede expresar en magnitud y fase:

$$\eta = |\eta|\langle\theta_\eta\rangle$$

Donde:

$$|\eta| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta_\eta = Tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para el campo magnético se tiene que:

$$H(x) = \frac{E_{xo}}{\eta} e^{\gamma x}$$

Lo cual significa que en un medio dieléctrico disipativo, el campo magnético y el campo eléctrico ya no se encuentran en fase. El campo magnético se encuentra atrasado con respecto al campo eléctrico en un ángulo igual al de la impedancia intrínseca.

La impedancia intrínseca también puede calcularse en términos de la tangente de pérdidas del medio como:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon\left(1 - j\,\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}}$$

Reduciendo:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - j\,\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2}$$

Expresado en notación polar:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + Tan^2\delta\right)^{-1/4} \angle\, \frac{\delta}{2}$$

Ecuación 61. Impedancia intrínseca en función de la tangente de pérdidas

Lo cual significa que el máximo ángulo que puede alcanzar la impedancia intrínseca es de 45º dado que el ángulo de pérdidas es siempre inferior a 90º.

Ejemplo 67. Impedancia intrínseca en un dieléctrico con pérdidas.

Un medio dieléctrico no magnético tiene una conductividad de 10^{-2}Sm/m y una permitividad relativa de 3.5. Calcule la impedancia intrínseca del medio.

Solución:

La impedancia intrínseca viene dada por: $\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$

Para este caso:

$$\omega = 2\pi \times 10^5 \frac{rad}{seg} \quad \mu = \mu_0 \quad \epsilon = 3.5\epsilon_0$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j2\pi \times 10^5 \times 4\pi \times 10^{-7}}{10^{-2} + j2\pi \times 10^5 \times 3.5 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}}$$

Simplificando:

$$\eta = \sqrt{\frac{j8\pi^2}{1 + j\frac{3.5}{18} \times 10^{-2}}}$$

Resolviendo:

$$\eta = (6.28 + j6.28)\Omega = 8.9\langle 45^0 \rangle \Omega$$

Profundidad de penetración

De la ecuación de onda del campo eléctrico, puede deducirse que el campo decrece exponencialmente cuando ingresa en un medio con pérdidas. La constante de atenuación da una medida de la tasa de decaimiento de la amplitud de señal.

$$|E| = E_{x0} e^{-\alpha x}$$

$$\frac{d|E|}{dx} = -\alpha E_{x0} e^{-\alpha x}$$

Dado que la señal decae exponencialmente, debe esperarse que exista un límite en el cual la señal sea prácticamente imperceptible, y ese límite debe guardar relación directa con la constante de atenuación.

Cuando la distancia recorrida dentro del medio es equivalente al inverso de la constante de atenuación, la amplitud del campo eléctrico es equivalente a:

$$|E| = E_{x0}e^{-\alpha \times \frac{1}{\alpha}}$$

$$|E| = E_{x0}e^{-1} = 0.367E_{x0}$$

Es decir que decae al 36.7% del valor del campo original. En este punto se considera que la señal se encuentra demasiado atenuada siendo prácticamente imperceptible.

Por esta razón, el inverso de la constante de atenuación se denomina profundidad de penetración de la onda $\boldsymbol{\delta_p}$. Dado que la potencia de una señal es proporcional al cuadrado de su amplitud, cuando la señal decae al 36% de su valor, su potencia decae al 13%.

$$\delta_p = \frac{1}{|\alpha|}$$

Como las unidades de la constante de atenuación son Np/m, la profundidad de penetración queda expresada en metros.

Ejemplo 68. Profundidad de penetración en un dieléctrico disipativo.

Para el agua de mar, las constantes de permeabilidad, permitividad y conductividad son, respectivamente,:

$$\epsilon_r = 72 \quad \sigma = 4\frac{Sm}{m} \quad \mu_r = 1.002$$

Calcule la profundidad de penetración de una señal de 10MHz que se propaga en agua de mar.

Solución:

Se calcula la constante de propagación γ:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^7 \frac{rad}{seg} \quad \mu = 1.002\mu_0 \quad \epsilon = 72\epsilon_0$$

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \times 10^7 \times 1.002 \times 4\pi \times 10^{-7}\left(4 + j2\pi \times 10^7 \times 72 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right)}$$

Evaluando:

$$\gamma = \sqrt{j8\pi^2(4 + j4 \times 10^{-2})}$$

$$\gamma = 12.56 + 12.56i$$

La constante de atenuación:

$$\alpha = 12.56\ Np/m$$

La profundidad de penetración:

$$\delta_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{12.56 Np/m} = 7.96 cm$$

La señal se atenúa casi completamente en los primeros 8cm.

Longitud de onda

Para un tiempo constante, los puntos del espacio que tienen igual magnitud de campo se encuentran separados por una distancia tal que la ganancia de fase sea equivalente a 2π radianes:

$$(\omega t - \beta x_1) - (\omega t - \beta x_2) = 2\pi$$

Reduciendo:

$$\beta(x_2 - x_1) = 2\pi$$

La distancia entre los dos puntos de la misma fase es igual a una longitud de onda, por tanto:

$$x_2 - x_1 = \lambda$$

$$\lambda \beta = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

La longitud de onda es igual a 2π dividido por la constante de fase.

Ejemplo 69. Longitud de onda en un medio disipativo.

Para un medio disipativo, las constantes de permeabilidad, permitividad y conductividad son respectivamente,:

$$\epsilon_r = 8 \quad \sigma = 0.4 \frac{Sm}{m} \quad \mu_r = 1.00$$

Calcule la longitud de onda y la cantidad de longitudes de onda que alcanza a penetrar una señal de 10MHz en el medio.

Solución:

Se calcula la constante de propagación γ:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^7 \frac{rad}{seg} \quad \mu = 1.00\mu_0 \quad \epsilon = 8\epsilon_0$$

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \times 10^7 \times 1.00 \times 4\pi \times 10^{-7}\left(0.4 + j2\pi \times 10^7 \times 8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right)}$$

Evaluando:

$$\gamma = \sqrt{j8\pi^2\left(0.4 + j\frac{4}{9} \times 10^{-2}\right)}$$

$$\gamma = 3.95 + 3.99i$$

La constante de fase es:

$$\beta = 3.99\, rad/m$$

La longitud de onda queda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi\, rad}{3.99\, rad/m} \cong \frac{\pi}{2}\, m$$

La profundidad de penetración:

$$\delta_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{3.95\, Mp/m} = 0.253m \cong 25.3cm$$

La onda penetra:

$$\delta_p(\lambda) = \frac{25.3cm}{\frac{\pi}{2}m} = 0.16\,\lambda$$

No alcanza a penetrar ni siquiera una longitud de onda completa. Es un medio altamente disipativo.

Ondas en buenos aislantes

Cuando la tangente de pérdidas es pequeña, el cálculo de los indicadores de propagación de ondas electromagnéticas se puede hacer por medio de fórmulas aproximadas, las cuales simplifican dicho cálculo.

Cuando la tangente de pérdidas es muy inferior a la unidad, se pueden despreciar sus efectos sobre la velocidad, la longitud de onda y la impedancia intrínseca. Conservando en la aproximación el cálculo de la profundidad de penetración y de la constante de atenuación.

La constante γ en función de la tangente de pérdidas se expresa como:

$$|\gamma| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1+\tan^2\delta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Cuando la tangente de pérdidas es muy pequeña $(Tan(\delta) < 0.1)$ se puede despreciar su efecto y el resultado es:

$$|\gamma| \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

En el caso de la impedancia intrínseca, se tienen consideraciones similares, por lo tanto, al despreciar el efecto de la tangente de pérdidas se obtiene:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+Tan^2\delta\Big|_{\to 0}\right)^{-1/4} \langle \frac{\delta}{2} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

En cuanto a la constante de fase, ésta se multiplica por un número muy cercano a la unidad, dado lo pequeño del ángulo de pérdidas, por lo tanto:

$$\beta = -|\gamma| Cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cong -\gamma$$

En el caso de la constante de atenuación, se puede usar una aproximación trigonométrica, basada en la definición de las funciones circulares:

$$Sen(x) \cong Tan(x) \cong x]_{x\to 0}$$

Esta aproximación se ilustra en la figura 85.

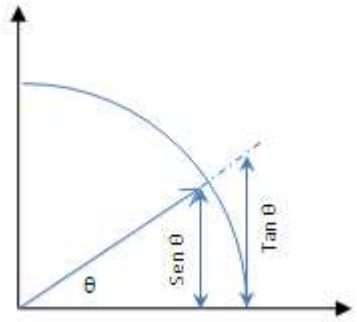


Figura 85. Aproximación de las funciones circulares seno y tangente en ángulos pequeños

$$\alpha = -|\gamma| Sen\left(\frac{\delta}{2}\right) \cong -\frac{1}{2}\gamma\, Tan\delta$$

Reemplazando:

$$\alpha = -|\gamma| Sen\left(\frac{\delta}{2}\right) \cong -\frac{1}{2}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

Simplificando:

$$\alpha \cong -\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

En función de la impedancia intrínseca queda:

$$\alpha = -\frac{\sigma\eta}{2}$$

El signo negativo solo refuerza la tendencia decreciente de la amplitud del campo electromagnético.

La profundidad de penetración queda:

$$\delta_p = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{2}{\sigma\eta}$$

Como se puede apreciar en un buen dieléctrico, la profundidad de penetración es inversamente proporcional a la conductividad del material y es independiente de la frecuencia de la señal aplicada.

Por supuesto, para que estas aproximaciones sean válidas, se debe asegurar que se está trabajando en la banda de frecuencia correcta, y ésta a su vez está definida por la tangente de pérdidas del material.

Ejemplo 70. Cálculo de la frecuencia crítica para que un material se comporte como buen dieléctrico.

Calcule la frecuencia en la cual el aire ($\sigma \cong 10^{-5}$) se comporta como un buen dieléctrico.

Solución:

La permitividad y permeabilidad del aire son aproximadamente las mismas del vacío.

Por lo tanto, para que la tangente de pérdidas sea despreciable es necesario que:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 0.1$$

Despejando la frecuencia: $$f > \frac{\sigma}{0.1 \times 2\pi \times \varepsilon_0}$$

En este caso: $$f > \frac{10^{-5}}{0.1 \times 2\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}$$

$$f > 1.8MHz \cong 2MHz$$

Es decir que para frecuencias superiores a 2MHz, el aire se comporta como un buen dieléctrico y son perfectamente válidas las ecuaciones aproximadas.

Ondas en buenos conductores

En un buen conductor la tangente de pérdidas es muy alta (>10), en estas condiciones, el ángulo de pérdidas se aproxima a $\frac{\pi}{2}$.

$$\sigma >> \omega\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta \to 90^0$$

Para el agua de mar, los valores de profundidad de penetración y tangente delta medidos a 10MHZ son, respectivamente,:

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 99.9 \qquad \rho = \frac{-1}{\alpha} = 0.008 \quad m$$

Cuando se calcula el ángulo de pérdidas se obtiene:

$$\delta = 89.4^0$$

La constante γ en función de la tangente de pérdidas se expresa como:

$$|\gamma| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1+\tan^2\delta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Como la tangente de pérdidas no es para nada despreciable frente al 1 de la ecuación, la constante de propagación es aproximadamente:

$$|\gamma| \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon \times \frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

Reduciendo la expresión:

$$|\gamma| \cong \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

El ángulo de la constante de propagación tiene a 45º por lo tanto:

En estas condiciones $Cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = Sen\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Por lo tanto, de acuerdo con las ecuaciones de propagación en medios disipativos se tiene que:

$$\propto = |\gamma| Sen\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\alpha \cong \sqrt{\omega\mu\sigma} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Reemplazando:

$$\alpha \cong \sqrt{2\pi f\mu\sigma \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\pi\sigma\mu f}$$

En la mayoría de los buenos conductores: $\mu = \mu_0$

Por lo tanto, la constante de atenuación queda:

$$\alpha = \sqrt{\pi\sigma\mu_0 f} = k\sqrt{f}$$

Como el ángulo de la constante de propagación es de 45º, la constante de fase es igual a la constante de atenuación:

$$\beta = \alpha$$

Efecto superficial

Dado que en todos los medios disipativos, la profundidad de penetración se calcula como el inverso de la constante de atenuación, a lo cual no son ajenos los buenos conductores, en estos la profundidad de penetración queda definida por:

$$\delta_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma \mu_0 f}}$$

La profundidad de penetración es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de frecuencia de la señal aplicada y de la conductividad del medio.

A mayor frecuencia, menor penetración en el conductor, por lo que su resistencia eléctrica aparente aumenta. (La corriente se distribuye a través de un área menor).

Este fenómeno se le conoce como efecto piel o superficial, y ocasiona que la resistencia AC de un conductor sea mayor que la resistencia DC.

Ejemplo 71. Profundidad de penetración en un conductor de cobre a diferentes frecuencias.

Calcule la profundidad de penetración en cobre de una señal armónica de a) 60Hz, b) 1kHz, c)1MHz.

Solución:

Para el cobre se tienen los parámetros:

$$\sigma = 5.8 \times 10^7 \ S/m \qquad \mu_r \cong 1$$

De donde resulta: $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}} \ m$

Para una frecuencia de 60Hz: $\delta = \frac{0.0661}{\sqrt{60}} = 8.53 \ mm$

Para una frecuencia de 1kHz: $\delta = \frac{0.0661}{\sqrt{1000}} = 2.1 \ mm$

Para una frecuencia de 1MHz: $\delta = \frac{0.0661}{\sqrt{10^6}} = 66 \ \mu m$

En la figura 86, se muestran las curvas de profundidad de penetración en diversas frecuencias para diferentes materiales conductores de uso común en electrónica.

Como se aprecia, a medida que la conductividad del material disminuye, la profundidad de penetración aumenta. En el agua de mar, la profundidad de penetración a 100KHz es de 80cm., mientras en el cobre, a la misma frecuencia, es de solo 0.21mm.

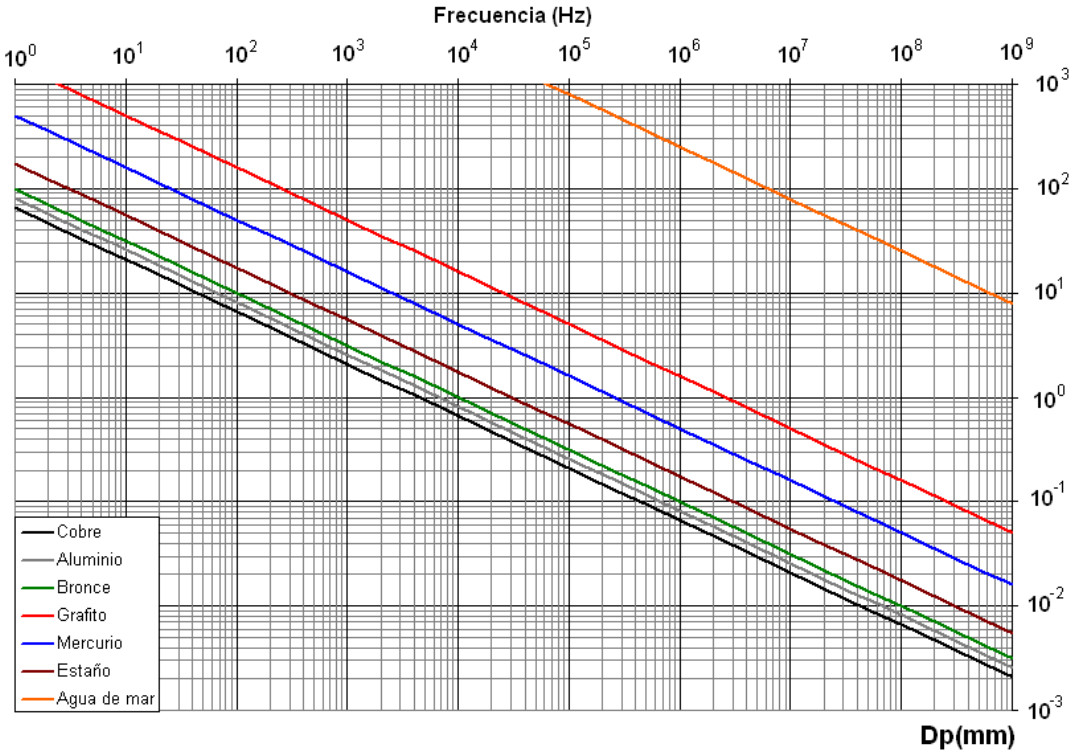


Figura 86. Profundidad de penetración en diferentes medios conductores a diferentes frecuencias

En la figura 87, se muestran las simulaciones por el método de los elementos finitos para la distribución de corrientes a través del área transversal de un conductor cilíndrico de cobre a frecuencias de 100Hz, 1KHz, 100KHz y 10MHz.

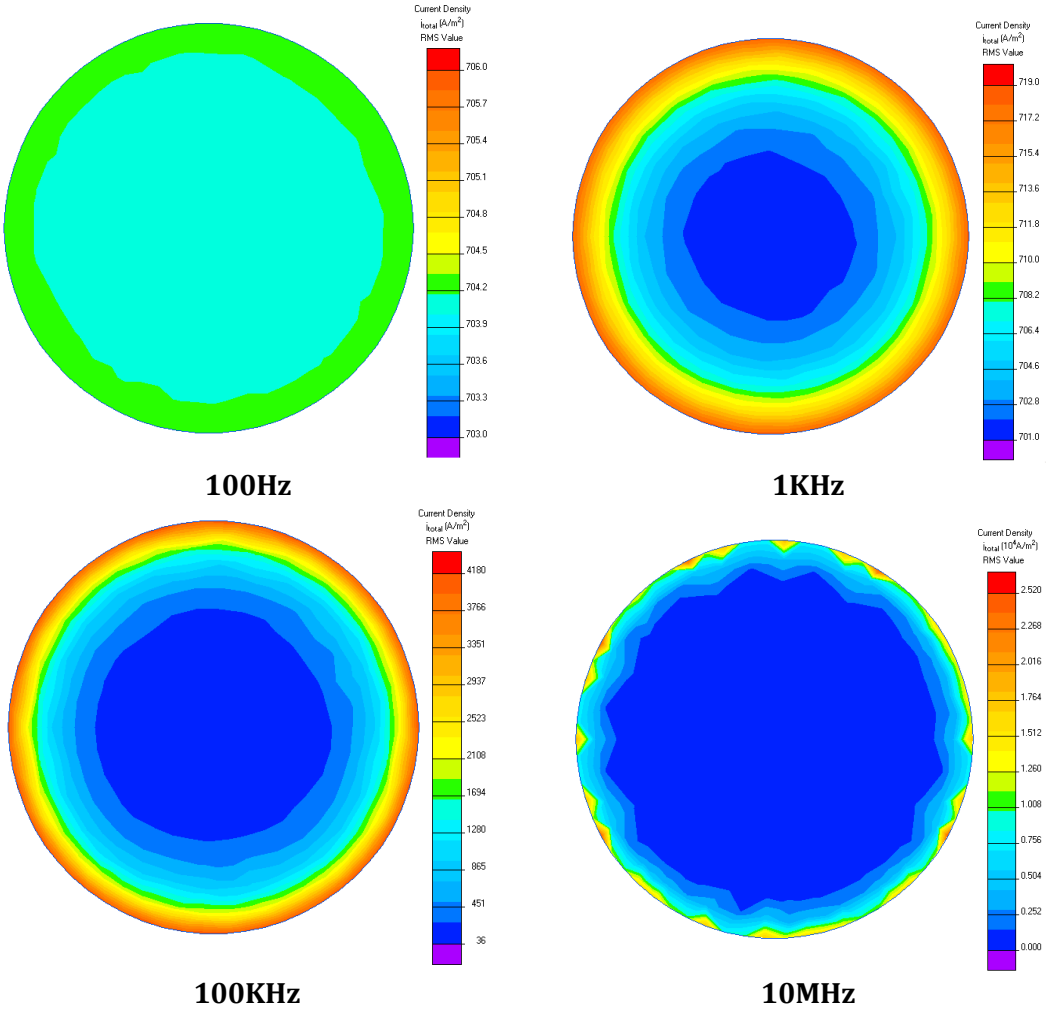


Figura 87. Distribución de corriente en la sección de un conductor cilíndrico de cobre a diferentes frecuencias. Efecto superficial

Como se puede apreciar claramente, la densidad de corriente decae a medida que se penetra en el conductor. El modelo matemático de la penetración de la densidad de corriente obedece a la ecuación:

$$J = J_0 e^{-\alpha(r_0 - r)}$$

Ecuación 62. Distribución de corriente en un conductor cilíndrico

En donde r_0 es el radio externo del conductor.

La corriente a altas frecuencias tiende a fluir por la superficie externa del conductor, por lo que si se desea reducir el efecto superficial, conviene reemplazar el conductor cilíndrico sólido por un sistema de múltiples alambres paralelos trenzados o, en el caso de conductores

rectangulares, por un sistema de múltiples placas paralelas de dimensiones no mayores a la profundidad de penetración del conductor a la frecuencia de operación, como se muestra en la figura 88.

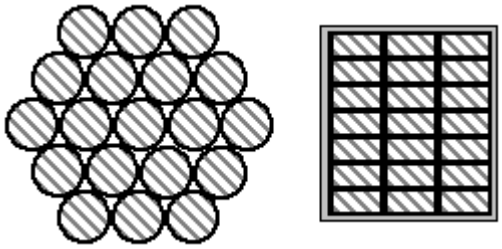


Figura 88. Conductores usados para reducir las pérdidas por efecto superficial

Efecto piel y resistencia AC

Como consecuencia de la variación en la profundidad de penetración de la corriente con respecto a la frecuencia de la señal aplicada, la resistencia eléctrica del conductor varía.

A medida que la frecuencia aumenta, la profundidad de penetración de la señal disminuye, (figura 86), disminuyendo también el área efectiva usada para la transmisión de señal; sin embargo, el incremento en la resistencia eléctrica no depende únicamente de la profundidad de penetración, sino también de su relación con la geometría del conductor.

Una alternativa a la solución analítica del problema de la resistencia AC es la solución numérica mediante elementos finitos. Como se muestra en la figura 87, se puede obtener la densidad de corriente a través del MEF e integrarla para hallar la corriente total; con la corriente calculada y conocido el valor del voltaje es fácil deducir el valor de la resistencia.

Un método alternativo sencillo para la solución analítica puede ser encontrar la corriente para frecuencia cero y la corriente para una frecuencia cualquiera, en estas condiciones, la relación de corrientes debe ser inversa a la relación de resistencias. Dado que la resistencia a frecuencia cero se puede deducir fácilmente a partir de la geometría del conductor y de su conductividad, se puede entonces calcular la resistencia AC a cualquier frecuencia.

Para conductores cilíndricos, la densidad de corriente AC queda definida por la ecuación 62, cuando se integra sobre el área transversal del conductor, la corriente total queda:

$$I_{AC} = \int_S J \cdot dS = \int_0^{2\pi r_0} \int_0 J_0 e^{-\alpha(r_0 - r)} r dr d\varphi$$

Cuando se evalúa la integral el resultado es:

$$I_{AC} = \frac{2\pi J_0}{\alpha^2}\left[(\alpha r_0 - 1) + e^{-\alpha r_0}\right]$$

A frecuencia cero, la constante α es cero, por lo que la densidad de corriente es de la forma:

$$J = J_0$$

En estas condiciones, la corriente total es simplemente el producto de la densidad de corriente por la sección transversal.

$$I_{DC} = \pi r_0^2 J_0$$

Dado que la relación de corrientes es inversa a la relación de resistencias, la relación entre resistencias AC y DC queda:

$$\frac{R_{DC}}{R_{AC}} = \frac{I_{AC}}{I_{DC}} = \frac{2}{(\alpha r_0)^2}\left[(\alpha r_0 - 1) + e^{-\alpha r_0}\right]$$

Ecuación 63. Relación entre la resistencia DC y AC de un conductor cilíndrico

Esta relación es una función de α y de r_0, diferente para cada material a distintas frecuencias como se muestra en la figura 86.

Para calibres AWG de conductor diferentes, se tendrán diferentes relaciones de resistencia AC y DC. En la figura 89, se muestran los cocientes entre resistencias DC y AC para diferentes calibres AWG de conductores cilíndricos de cobre en un amplio rango de frecuencias.

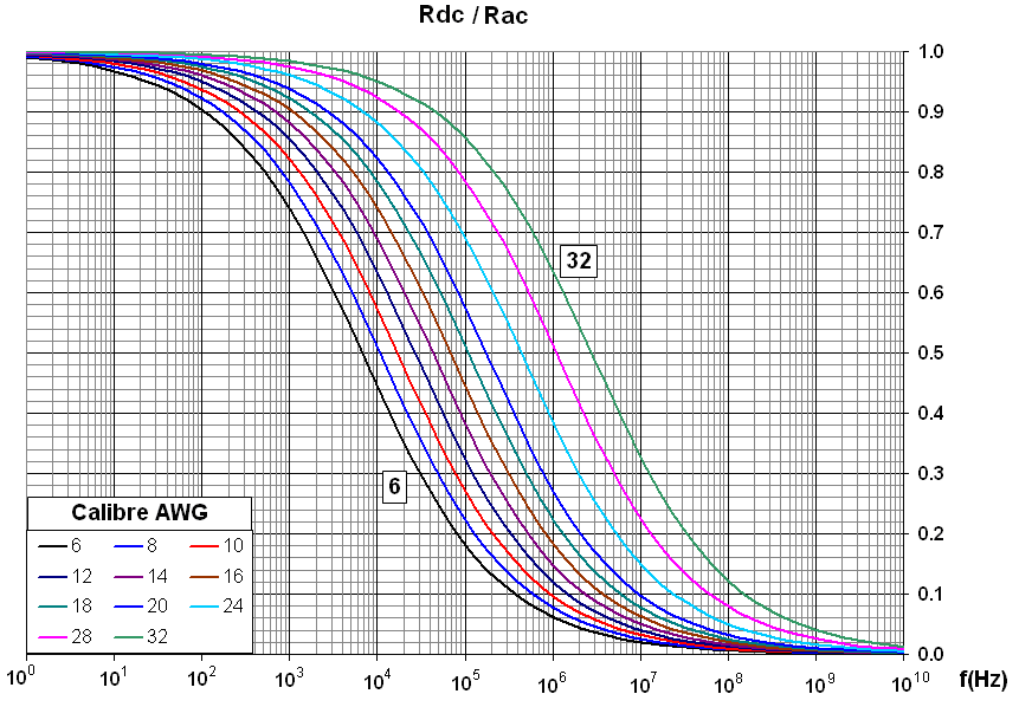


Figura 89. Relaciones de resistencia DC y AC para conductores cilíndricos en cobre de diferentes calibres AWG, desde calibre 6 hasta calibre 32

Ejemplo 72. Cálculo de la resistencia AC de un conductor de aluminio a diferentes frecuencias.

Calcule la resistencia AC de un alambre de aluminio de 5cm de longitud y 1mm. de diámetro a una frecuencia de a) 1kHz, b) 100kHz, c) 10MHz.

Solución:

Se calcula la resistencia DC de acuerdo con los siguientes parámetros:

$$\sigma = 3.8\times10^{7}\ S/m \qquad r_0 = 0.5mm \quad l = 0.05m$$

De donde resulta: $$R_{DC} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{0.05m}{\left(3.8\times10^{7}\ S/m\right)\pi\left(0.5\times10^{-3}\right)^2} = 1.675m\Omega$$

De la figura 86 se obtiene la profundidad de penetración de la señal en el aluminio para las diferentes frecuencias:

Para una frecuencia de 1kHz: $\alpha r_0 = \left(4\times10^{2}\,m^{-1}\right)\left(0.5\times10^{-3}m\right) = 0.2$

Se utiliza la ecuación 63 para calcular la relación R_{DC} y R_{AC}.

Para 1kHz: $$\frac{R_{DC}}{R_{AC}} = \frac{I_{AC}}{I_{DC}} = \frac{2}{(0.2)^2}\left[(0.2-1)+e^{-0.2}\right] = 0.936$$

De donde se deduce que: $$R_{AC} = \frac{R_{DC}}{0.936} = 1.789m\Omega$$

Los valores para las otras frecuencias se encuentran en la tabla.

Frecuencia	δ	α	αr_0	R_{AC}
1kHz	2.5mm	$4x10^2$ m^{-1}	0.2	1.789mΩ
100kHz	0.26mm	$3.85x10^3$ m^{-1}	1.93	2.902mΩ
10MHz	0.026mm	$3.85x10^4$ m^{-1}	19.3	17.047mΩ

Ejemplo 73. Cálculo de la resistencia AC de un conductor de cobre.

Calcule la resistencia AC de un alambre de cobre calibre 20AWG de 5cm de longitud a una frecuencia de a) 1kHz, b) 100kHz, c) 10MHz.

Solución:

Se calcula la resistencia DC de acuerdo con los siguientes parámetros:

$\sigma = 5.8\times10^{7}\ S/m \qquad r_0 = 0.406mm \quad l = 0.05m$

De donde resulta: $$R_{DC} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{0.05m}{\left(5.8\times10^{7}\ S/m\right)\pi\left(0.406\times10^{-3}\right)^2} = 1.665m\Omega$$

De la figura 89, se obtiene la relación de resistencias AC y DC para las diferentes frecuencias y con ella se puede hacer el cálculo de la resistencia AC:

Los valores de resistencia AC se encuentran en la tabla.

Frecuencia	R_{DC}/R_{AC}	R_{AC}
1kHz	0.94	1.771 mΩ
100kHz	0.57	2.921 mΩ
10MHz	0.1	16.65 mΩ

Parámetros de propagación en medios abiertos

Las constantes de propagación, atenuación y fase, así como la impedancia intrínseca de un medio, reciben el nombre de parámetros de propagación. En la tabla 12, se muestra un resumen de los parámetros de propagación en medios abiertos según la clasificación basada en la tangente de pérdidas.

Tabla 12. Parámetros de propagación en medios abiertos

Medio	No disipativo	Dieléctrico con bajas pérdidas	Dieléctrico con pérdidas	Buen conductor
γ	$j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\sqrt{j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)}$	$\sqrt{j\omega\sigma\mu_o}$
α	0	$\frac{\sigma\eta}{2}$	$Re(\gamma)$	$\sqrt{\pi f\sigma\mu_o}$
β	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$Im(\gamma)$	$j\sqrt{\pi f\sigma\mu_o}$
η	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{j\omega\mu_o}{\sigma}}$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad f_v = \frac{v_p}{C_o} \qquad n = \frac{1}{f_v}$$

Velocidad de fase, longitud de onda, factor de velocidad e índice de refracción.

Ejemplo 74. Cálculo de los parámetros de propagación en un medio abierto.

Un medio abierto tiene las siguientes características electromagnéticas:

$$\sigma = 10^{-3}\frac{Sm}{m} \quad \epsilon_r = 8 \quad \mu_r = 1$$

Obtenga los parámetros de propagación para una señal de 100MHz.

Solución:

Se calcula la tangente de pérdidas para discriminar el medio:

$$Tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-3}Sm/m}{2\pi \times 10^{8}rad/seg \times 8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}F/m}$$

Simplificando:

$$Tan(\delta) = 0.01125$$

Es una tangente de pérdidas inferior a 0.1, por lo cual, se puede caracterizar el medio como un dieléctrico con bajas pérdidas, por lo tanto:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j2\pi \times 10^{8}rad/seg \times \sqrt{4\pi \times 10^{-7}H/m \times 8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}F/m}$$

$$\gamma = j\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}$$

$$\beta = \frac{4\pi}{3}\sqrt{2}\,rad/m$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}H/m}{8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}F/m}} = 133.3\Omega$$

La constante de atenuación:

$$\alpha = \frac{\sigma\eta}{2} = \frac{10^{-3}Sm/m \times 133.3\Omega}{2} = 66.6 \times 10^{-3}Np/m$$

La velocidad de fase:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^8 \text{rad/seg}}{\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}\text{rad/m}} = 1060000\text{km/s}$$

La longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}\text{rad/m}} = 2.12\text{m}$$

El factor de velocidad

$$f_v = \frac{v_p}{c_o} = \frac{106 \times 10^6 m/s}{3 \times 10^8 m/s} = 0.354$$

Finalmente el índice de refracción:

$$n = \frac{1}{f_v} = \frac{1}{0.354} = 2.83$$

El espectro electromagnético y las bandas de referencia

El conjunto de todas las posibles ondas electromagnéticas que pueden generarse, recibe el nombre de espectro electromagnético. En principio, el espectro electromagnético parece no tener fin, ya que cualquier fuente puede generar cualquier frecuencia si es adecuadamente excitada en términos electromagnéticos; sin embargo, la continuidad del espectro electromagnético suponía una contradicción con las leyes fundamentales de la física, en particular con la ley de conservación de la energía y la masa, lo que llevó a cuantizar el espectro electromagnético a través de la llamada "Teoría de la radiación de cuerpo negro", cuyo estudio escapa al alcance del presente texto.

En la figura 90, se muestran las frecuencias y longitudes de onda de las aplicaciones de uso común en Electromedicina y Electrónica en general.

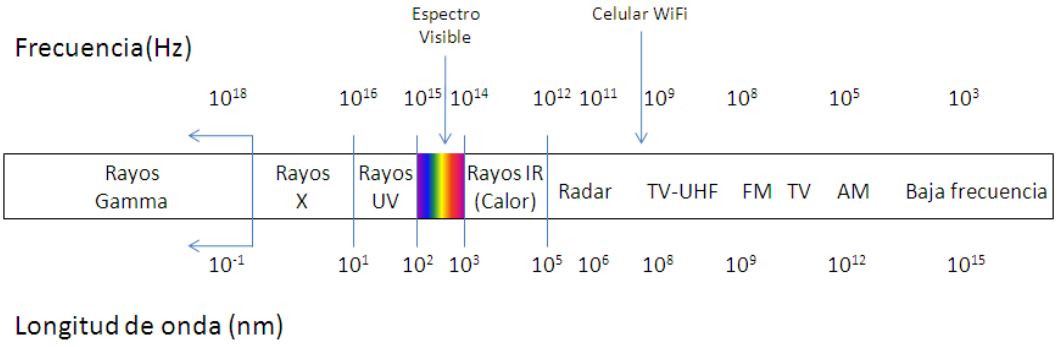


Figura 90. Espectro electromagnético de las aplicaciones más comunes

El espectro en realidad no se divide por frecuencias exactas, sino por regiones o zonas denominadas "Bandas". Para determinar la frecuencia de referencia de una banda específica, se toma la frecuencia superior de la banda y se hace un promedio geométrico con la frecuencia inferior de la misma.

$$f_0 = \sqrt{f_{sup} \times f_{inf}}$$

El llamado espectro visible, corresponde a las longitudes de onda que pueden percibir los ojos en forma de colores, sus longitudes de onda van desde los 380nm para el violeta, hasta 750nm para el rojo. El valor de referencia para la banda, ubicado en el centro geométrico de la escala visible es de 530nm.

Para efectos de normalización, la Unión Internacional de Telecomunicaciones, UIT,[23] ha dividido el espectro EM en bandas de aceptación mundial, las cuales se nombran por sus siglas en inglés, según se muestra en la tabla 13.

Tabla 13. Bandas de frecuencia estandarizadas según ITU

Sigla	Significado
ELF	Extra Low Frequency
SLF	Super Low Frequency
ULF	Ultra Low Frequency
VLF	Very Low Frequency
LF	Low Frequency
MF	Medium Frequency
HF	High Frequency
VHF	Very High Frequency
UHF	Ultra High Frequency
SHF	Super High Frequency
EHF	Extra High Frequency

Las bandas de referencia y sus principales aplicaciones se muestran en la tabla 14. Dependiendo de la aplicación a desarrollar, se debe ubicar la banda de referencia y buscar las frecuencias disponibles dentro de dicha banda para hacer el respectivo desarrollo.

[23] ITU, International Telecommunications Union, por siglas en inglés.

Tabla 14. Principales aplicaciones en las bandas definidas por UIT

Sigla	Frecuencia (Hz)	λ (m)	Aplicaciones
ELF	3-30	10^8-10^7	Comunicación con submarinos
SLF	30-300	10^7-10^6	
ULF	300-3k	10^6-10^5	Minería
VLF	3k-30k	10^5-10^4	Radio de baja frecuencia
LF	30k-300k	10^4-10^3	Navegación aérea y marítima
MF	300k-3M	10^3-10^2	Radiodifusión AM – Radio aficionados
HF	3M-30M	10^2-10^1	Radios de onda corta – Radio aficionados – Banda civil
VHF	30M-300M	10^1-10^0	Radiodifusión FM – TV – Satélites
UHF	300M-3G	10^0-10^{-1}	TV-UHF – Telefonía móvil – Wifi.
SHF	3G-30G	10^{-1}-10^{-2}	TV Satelital – Radio enlaces - Radar
EHF	30G-300G	10^{-2}-10^{-3}	Radio astronomía

En cada país existe legislación particular sobre cuáles bandas se pueden usar de forma libre y cuáles requieren permisos especiales en términos de seguridad aérea o terrestre o comunicaciones militares.

En Colombia, el Ministerio de Comunicaciones, a través de la Resolución 689 de 2004, atribuyó unas bandas de frecuencias para libre utilización dentro del territorio nacional.

El artículo 5º de la norma atribuyó las siguientes bandas de frecuencias para la operación de dichos sistemas inalámbricos de banda ancha y baja potencia.

UHF: Banda de 902 a 928 MHz - Banda de 2.4 a 2 .48 GHz

SHF: Banda de 5.15 a 5.25GHz - Banda de 5.25 a 5.35 GHz - Banda de 5.47 a 5.725 GHz - Banda de 5.725 a 5.85 GHz

Potencia eléctrica transmitida a través de ondas electromagnéticas

El vector de Poynting

Una onda electromagnética se forma a partir de un campo eléctrico variable armónicamente y un campo magnético perpendicular a él, los cuales se propagan en una dirección definida.

Cuando se tiene una onda plana que se propaga en dirección X y en la cual el campo eléctrico se encuentra en dirección Z, el campo magnético aparece en dirección Y, según se deduce del ejemplo 68.

$$E(\vec{x},t) = E_{xo}e^{-\alpha x}Cos[\omega t - \beta x]\vec{a}_z$$

$$H(\vec{x},t) = \frac{E_{xo}}{|\eta|}e^{-\alpha x}Cos[\omega t - \beta x - \theta_\eta]\vec{a}_y$$

Al hacer el producto vectorial de los vectores de campo eléctrico y magnético se obtiene un vector dado por:

$$\mathrm{P} = E \times H = -\frac{E_{xo}^2}{|\eta|}e^{-2\alpha x}Cos[\omega t - \beta x]Cos[\omega t - \beta x - \theta_\eta]\vec{a}_x$$

En el análisis dimensional se obtiene que el producto del campo magnético por el campo eléctrico es equivalente a:

$$|\mathrm{P}| = |E||H| = \frac{Voltios}{m} \times \frac{Amperios}{m} = \frac{Watts}{m^2}$$

Es decir, el vector **P** representa la potencia por unidad de área que transporta la onda electromagnética.

Este vector se llama de Poynting[24] y apunta en dirección contraria a la dirección de propagación de la onda, por lo que si se desea obtener la energía total que transporta una onda basta con integrar el negativo del vector de Poynting sobre una superficie perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

$$W_e = -\int_S \vec{\mathrm{P}} \cdot \vec{dS} = -\int_S E \times H \cdot \vec{dS}$$

Para el cálculo de la potencia media transmitida por la onda electromagnética, se hace un promedio del vector de Poynting durante un periodo de tiempo obteniendo como resultado:

$$\bar{\mathrm{P}} = -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_{xo}^2}{|\eta|}e^{-2\alpha x}Cos[\omega t - \beta x]Cos[\omega t - \beta x - \theta_\eta]dt$$

$$\bar{\mathrm{P}} = -\frac{E_{xo}^2}{2|\eta|}e^{-2\alpha x}\,Cos\theta_\eta$$

Este vector conocido como de Poynting promedio da el promedio de la potencia por unidad de área transmitida por la onda electromagnética en la dirección de propagación de la misma.

[24] En honor a su descubridor John Henry Poynting, físico inglés, quien hizo su principal aporte a la ciencia en la aplicación de la ley de conservación de energía al flujo de potencia a través de ondas electromagnéticas, llamado Teorema de Poynting.

Como se puede observar, la potencia decrece a una tasa igual al doble de la tasa de decrecimiento del campo eléctrico y magnético, lo cual hace ineficiente la transmisión de potencia a través de ondas electromagnéticas cuando la tangente de pérdidas del medio es significativa.

Ejemplo 75. Potencia transmitida por una onda en un medio abierto.

Un medio abierto tiene las siguientes características electromagnéticas:

$$\sigma = 10^{-1}\frac{Sm}{m} \quad \epsilon_r = 18 \quad \mu_r = 1$$

Calcule la potencia que transmite en este medio una señal de 100MHz con una amplitud de campo eléctrico máxima de 120V/m. Calcule la profundidad de penetración de la señal.

Solución:

Se calcula la tangente de pérdidas para discriminar el medio:

$$Tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-1}Sm/m}{2\pi \times 10^8 rad/seg \times 18 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}F/m}$$

Simplificando:

$$Tan(\delta) = 1$$

Es una tangente de pérdidas grande, pero no suficiente para considerar el medio como un buen conductor (>10), por lo cual, se puede caracterizar el medio como un dieléctrico con pérdidas, por lo tanto:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

Reemplazando valores:

$$\eta = \sqrt{\frac{j2\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{0.1 + j2\pi \times 10^8 \times 18 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}}$$

Simplificando:

$$\eta = \sqrt{\frac{j80\pi^2}{0.1 + j0.1}} = (69 + j29)\Omega$$

En notación polar:

$$\eta = 74.7\langle 22.5^0\rangle\Omega$$

La potencia inicial transmitida al medio es (x=0):

$$P_0 = \frac{|E_{x0}^2|}{2|\eta|} Cos\theta_\eta$$

Reemplazando:

$$P_0 = \frac{|120V/m|^2}{2|74.7|\Omega} Cos(22.5^0)$$

Resolviendo:

$$P_0 = 89\ W/m^2$$

Potencia en valores RMS

Debido a que la diferencia de potencial, en los casos en que la señal de alimentación es alterna, tiende a expresarse en valores RMS,[25] la potencia transmitida por una señal electromagnética senoidal tiende a ser expresada de la misma forma.
El valor RMS de una señal periódica viene expresado por:

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2\ dt}$$

En forma general, el valor RMS de una señal periódica es igual a una constante multiplicada por su valor máximo; el valor de la constante depende del factor de forma de la señal considerada. Para el caso de una señal senoidal:

$$x(t) = X_p Cos(\omega t)$$

El valor RMS es:

$$X_{RMS} = \frac{X_p}{\sqrt{2}}$$

Cuando se expresa la magnitud del campo eléctrico en valores RMS el campo eléctrico equivalente es:

$$E_{xo\_RMS} = \frac{E_{x0}}{\sqrt{2}}$$

Si se expresa el vector de Poynting en valores RMS la ecuación equivalente es:

$$P(x) = \frac{|E_{x0\_RMS}^2|}{|\eta|} e^{-2\propto x} Cos\theta_\eta$$

[25] RMS, son las siglas de Root Mean Square o su equivalente en español Raíz Cuadrada Media o valor RCM.

Pérdidas por propagación en un medio disipativo

Debido a que a medida que la onda EM penetra en un medio sufre una pérdida de potencia por efecto Joule, resulta importante definir qué porcentaje de la potencia inicial se conserva al cabo de haber recorrido de una determinada distancia.

La potencia que se conserva viene definida por la magnitud del vector de Poynting, por lo tanto, la potencia que se ha cedido al medio en forma de calor por efecto Joule es equivalente a la diferencia entre la potencia original y la potencia que transporta la onda en un punto x.

$$Pérdidas = P_0 - P(x)$$

Estas pérdidas, sin embargo, no acostumbran darse en Watts, sino en porcentaje de la potencia inicial con lo que el porcentaje de pérdidas de un medio específico queda definido por:

$$\%Pérdidas = \frac{P_0 - P(x)}{P_0}$$

En términos de la constante de atenuación:

$$\%Pérdidas = (1 - e^{-2\propto x}) \times 100\%$$

Ejemplo 76. Pérdidas por unidad de longitud en un medio disipativo.

Un medio abierto tiene las siguientes características electromagnéticas:

$$\sigma = 10^{-3}\frac{Sm}{m} \quad \epsilon_r = 1 \quad \mu_r = 1$$

Calcule las pérdidas por unidad de longitud en este medio para una señal de 300MHz. Si la señal original tiene una amplitud de campo eléctrico de $120V_{RMS}/m$. Calcule las pérdidas en Watts cuando la señal ha recorrido 10m en el medio.

Solución:

Se calcula la tangente de pérdidas para discriminar el medio:

$$Tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-3}Sm/m}{2\pi \times 3 \times 10^8 rad/seg \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}F/m}$$

Simplificando:

$$Tan(\delta) = 0.06$$

El medio es un dieléctrico de bajas pérdidas:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi\Omega$$

$$\propto = \frac{\sigma\eta}{2} = \frac{120\pi \times 10^{-3}}{2} = 0.1885\ Np/m$$

Como se piden las pérdidas por unidad de longitud se hace x=1m:

$$\%Pérdidas = 1 - e^{-2\propto x}$$

$$\%Pérdidas = 1 - e^{-2\propto} = 31.4\%$$

Es decir que en este medio se pierde casi un tercio de la potencia por cada metro de recorrido.

Si se hace un recorrido de 10 metros:

$$\%Pérdidas = 1 - e^{-20\propto} = 97.7\%$$

La potencia inicial es:

$$P_0 = \frac{|120V_{RMS}/m|^2}{|120\pi|\Omega} = 38.19\ W/m^2$$

Las pérdidas son por lo tanto:

$$Pérdidas = \frac{38.19W}{m^2} \times 0.977 = 37.3W/m^2$$

Atenuación en decibeles

El concepto de atenuación es complementario al concepto de pérdidas, y se refiere al porcentaje de potencia que se conserva al recorrer una determinada distancia dentro de un medio disipativo.

La atenuación se expresa normalmente en porcentaje y guarda también relación con el vector de Poynting:

$$\%Atenuación = \frac{P(x)}{P_0}$$

Expresado en términos de la constante de atenuación:

$$\%Atenuación = e^{-2\propto x}$$

No es muy común, sin embargo, dejar la atenuación en términos de la distancia, por lo que usualmente se toma una unidad de distancia y se expresa la atenuación por unidad de distancia:

$$\%Atenuación/m = e^{-2\propto}$$

Es muy común, sin embargo, que la atenuación se exprese en escala logarítmica con base en la misma escala usada para la medición de potencia sonora, es decir en decibeles.

La potencia expresada en decibeles de una señal sonora viene dada por:

$$P_{dB} = 10Log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

Donde la potencia P_0 se toma como una potencia base cuyo valor depende de la escala escogida.

Cuando esta escala se exporta al caso de las ondas EM se tiene:

$$\propto_{dB} = 10Log_{10}\left[\frac{P(x)}{P_0}\right]$$

En términos de la constante de atenuación:

$$\propto_{dB} = 10Log_{10}[e^{-2\propto x}]$$

Resolviendo:

$$\propto_{dB} = -20 \propto x\ Log_{10}[e]$$

Cuando se mide por unidad de longitud:

$$\propto_{dB/m} = -8.68 \propto$$

Donde la constante 8.68 proviene del logaritmo en base 10 del número de Euler multiplicado por 20.

Ejemplo 77. Atenuación en un medio disipativo.

Un medio abierto tiene las siguientes características electromagnéticas:

$$\sigma = 10^{-5}\frac{Sm}{m} \quad \epsilon_r = 1 \quad \mu_r = 1$$

Calcule la atenuación por unidad de longitud en este medio para una señal de 3GHz. ¿Qué distancia debe recorrer la señal para tener una atenuación superior a 3dB?

Solución:

Se calcula la tangente de pérdidas para discriminar el medio:

$$Tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-5} Sm/m}{2\pi \times 3 \times 10^{9} rad/seg \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}$$

Simplificando:

$$Tan(\delta) = 6 \times 10^{-5}$$

El medio es un dieléctrico de bajas pérdidas:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi\Omega$$

$$\propto = \frac{\sigma\eta}{2} = \frac{120\pi \times 10^{-5}}{2} = 0.001885\ Np/m$$

La atenuación en decibeles queda:

$$\propto_{dB/m} = -8.68 \propto = -0.016\ dB/m$$

Equivalente a:

$$\propto_{dB/m} = -16\ dB/km$$

Para tener una atenuación de -3dB, la señal debe recorrer una distancia de:

$$\propto_{dB/m} x = -3dB$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{-3dB}{\propto_{dB/m}}$$

Reemplazando:

$$x = \frac{-3dB}{-0.016dB/m} = 183.3m$$

Ejercicios del capítulo

1. La tierra recibe en promedio una densidad de potencia solar de 1300W/m^2, si se supone que esta potencia se radia desde el sol en una sola onda plana monocromática con incidencia normal, calcule la magnitud RMS del vector de campo eléctrico y del vector del campo magnético en la luz solar. Si se supone que la luz es amarilla (), calcule aproximadamente la longitud de onda de la señal que llega a la atmósfera.

2. Demuestre que en un vidrio transparente no magnético con índice de refracción **n**, la profundidad de penetración está determinada por: $\delta_p = \frac{2n}{\sigma \eta_0}$, donde $\eta_0 = 120\pi\,\Omega$. Si n=1.5, calcule la amplitud de campo eléctrico RMS y la amplitud de campo magnético que generan una densidad de potencia de 100W/m^2.

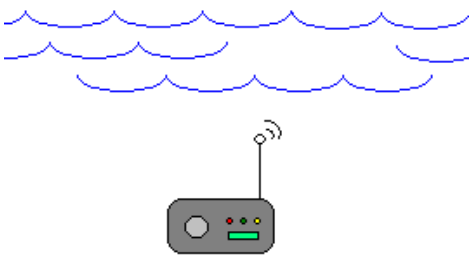
   Índice de refracción es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en un medio particular.

3. Cuál debe ser el mínimo espesor de una lámina de cristal transparente con índice de refracción de 1.8, para que un haz de luz violeta experimente un retraso de 360º al atravesar dicho cristal. La longitud de onda de referencia para un haz violeta en el vacío es de 480nm.

4. Se toman mediciones de potencia de un laser rojo en línea de vista con el medidor a 1m. de distancia y se observa que la potencia recibida es de un 98% de la emitida. Despreciando el efecto de la dispersión, calcule la conductividad del aire en el entorno. ¿Qué potencia se recibiría en el mismo medio si la dispersión fuera del 5%? ¿Si la dispersión fuera del 10%, cuál sería la máxima conductividad permitida si se requiere que la pérdida de potencia sea inferior a -2dB?

5. En un espacio abierto (llanura), el fabricante de un radio de 2.4GHz, usado para vigilancia, garantiza un alcance de entre 30 y 50 millas. ¿Cuál es el valor mínimo y máximo de conductividad del aire entre los cuales se sostiene la garantía del fabricante? ¿Cuánto es la tangente de pérdidas y la pérdida de potencia en dB/km en dichos valores?

6. ¿Si se sumerge un celular dentro de un contenedor impermeable en agua de mar, hasta qué profundidad capta señal? ¿Si se sumerge un radio FM? ¿Si es un radio AM?, tome como frecuencias de referencia 10GHz para la banda celular, 100MHz para la banda de FM y 1000kHz para el AM.



Calcule las pérdidas en dB/m para cada uno de los casos anteriormente contemplados.

7. Una onda electromagnética cuyo campo eléctrico viene dado por: $\vec{E} = -\frac{V_0}{r}\overrightarrow{a_r}e^{-(\propto+j\beta)z}$. Siendo $V_0 = 12V_{RMS}Cosh(\omega t)$. Viaja a través de un medio no magnético, abierto, de permitividad relativa 4. Calcule la velocidad de propagación y la atenuación en dB/m suponiendo que el medio tiene una conductividad eléctrica de 10^{-5}Sm/m.

8. Si una onda electromagnética plana incide en forma perpendicular sobre una placa de cobre de 80um de espesor, cuál debe ser la frecuencia de la señal para que el retardo de fase al atravesar la placa sea exactamente de $\frac{\pi}{4}$. ¿Cuál es la profundidad de penetración a dicha frecuencia? ¿Cuánto es la atenuación en dB/um en la placa de cobre? ¿Qué porcentaje de la potencia absorbida por la placa de cobre alcanza a salir al otro lado de ella?

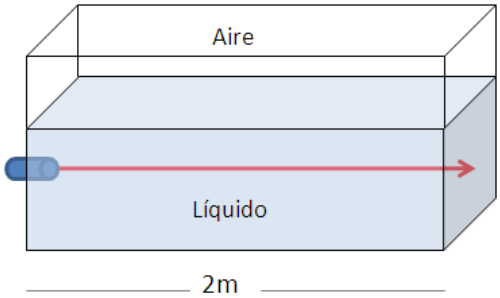
9. Una corriente alterna senoidal que circula por un alambre, genera un campo magnético dado por: $H = 30e^{j10^9 t}e^{j4x}\left[a_y + 3ja_z\right] mA/m$ en presencia de un medio no magnético. Defina en qué dirección viaja la onda, cual es la velocidad de propagación, y la longitud de onda. Calcule la potencia media transportada por la señal. (Ayuda: recuerde que $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ y $1 = e^{j0}$)

10. ¿Cuál debe ser el valor RMS del campo eléctrico E y del campo magnético H, para una onda plana monocromática que se desplaza en el aire llevando una potencia media de 100mW/m^2?. Desprecie la conductividad del aire.

11. Según el reglamento técnico de instalaciones eléctricas, la exposición a densidades de flujo magnético de valor RMS inferiores a 0.5 mT es segura. ¿Cuál debe ser la potencia máxima que debe transportar una señal celular (10^9Hz) en el aire, para que el valor RMS del campo magnético asociado, cumpla con lo dispuesto por el Retie?¿Cuál sería el valor del campo eléctrico asociado en valor RMS?

12. Una onda electromagnética plana de 100MHz se transporta por un medio disipativo perdiendo el 50% de su potencia por cada metro de recorrido, con un desfase de 5rad/m. Calcule la constante de atenuación, la constante de fase, la velocidad de propagación y las pérdidas del medio en dB/m.

13. Un rayo laser de 680nm y una potencia de 30mW/cm2 (en aire) atraviesa un líquido no magnético a lo largo de una distancia de 2m. se evidencia un índice de refracción de 1.8 y una pérdida de potencia del 0.1%



Calcule: la impedancia intrínseca del medio, la amplitud RMS del campo eléctrico y magnético en el líquido, la atenuación en dB/km del medio líquido y la longitud de onda dentro del líquido.

14. Si una onda electromagnética plana de 1GHz (Celular) incide en forma perpendicular sobre una placa de cobre ¿Cuál debe ser el espesor de la placa para que la potencia absorbida se atenúe hasta el 1% de su valor antes de salir de ella? ¿Cuánto es la pérdida en dB/um en la placa? ¿Cuál es el retardo de fase al atravesar la placa?

Respuestas a los ejercicios

1. $|E| = 700\,{}^{V}/_{m}$ $|H| = 1.5\,{}^{A}/_{m}$ $\lambda = 580nm$
2. $|E| = 129\,{}^{V}/_{m}$ $|H| = 773\,{}^{mA}/_{m}$
3. $\lambda = 320nm$
4. $\sigma = 53.6\,{}^{\mu Sm}/_{m}$ $|P(x = 1m)| = 93\%P_o$ $\sigma_{max} = 1.2\,{}^{mS}/_{m}$
5. $66\,{}^{nS}/_{m} < \sigma < 110\,{}^{nS}/_{m}$ $495 \times 10^{-9} < Tan(\delta) < 825 \times 10^{-9}$ $0.1 < \alpha_{dB/km} < 0.18$
6. $Celular\ \ 2.5mm$ $Radio\ FM\ \ 2.5cm$ $Radio\ AM\ \ 25cm$
7. $v_p = 150000\frac{km}{s}$ $\propto_{dB/km} = -8.2$
8. $f = 421kHz$ $\delta_p = 102\mu m$ $\propto_{dB} = -0.085\frac{db}{um}$ $\%P = 0\%$
9. $Direccion\ x$ $v_p = 250000\frac{km}{s}$ $\lambda = \frac{\pi}{2}\text{m}$ $P_0 = 894\frac{mW}{m^2}$
10. $|E| = 6.13\,{}^{V}/_{m}$ $|H| = 16.3\,{}^{mA}/_{m}$
11. $P_{max} = \frac{59.36W}{mm^2}$ $E = 149kV/m$
12. $\propto = 0.346$ $\beta = 5\frac{rad}{m}$ $\gamma = 5.01\,m^{-1}$ $v_p = 125.000\,\frac{km}{s}$ $\alpha_{dB} = -3\,dB/m$
13. $\eta = 209.4\Omega$ $\text{E} = 250.6\,{}^{\text{V}_{\text{RMS}}}/_{\text{m}}$ $H = 1.2\,\frac{A_{RMS}}{m}$ $\propto = -2.17\,{}^{dB}/_{km}$ $\lambda = 270\,nm$
14. $x = 4.8\mu m$ $\alpha = -4.15\frac{dB}{\mu m}$ $\Delta\varphi = 129^0$

Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para Ley de Inducción de Faraday y corriente de desplazamiento:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 442-459. ISBN 968-880-954-3.

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 236-246. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para ondas en medios abiertos, dieléctricos perfectos, disipativos y buenos conductores, así como para vector de Poynting:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 475-496. ISBN 968-880-954-3.

Para propagación en buenos conductores y efecto piel:

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 331-336. ISBN 978-607-15-0783-9.

Capítulo 7

Ondas en medios abiertos acotados

Introducción

El caso tratado en el capítulo anterior, en el cual una onda se propaga libremente a través de un medio sin fronteras ni barreras, es apenas una primera aproximación a la forma cómo en realidad las ondas electromagnéticas se propagan en una condición real.

El mismo plano de tierra, sobre el que se ubican las antenas y otras fuentes de ondas electromagnéticas, constituye una superficie reflectante, en la cual, cuando incide una onda, se ve reflejada parte de su energía, mientras que otra parte es absorbida por la superficie.

En el presente capítulo, se tratan los principios básicos que definen la forma en que diferentes superficies reflejan las señales electromagnéticas e influyen en su propagación.

Modos de propagación de ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas se propagan de diferente forma, dependiendo de la frecuencia, la energía de la señal y las propiedades electromagnéticas de los diferentes medios.

La propagación directa, se muestra en la figura 91, ocurre cuando existe una visual entre el emisor y el receptor, como en el caso de las antiguas antenas de TV. que debían orientarse hacia la ubicación de la antena repetidora, la cual a su vez mantenía un enlace visual con la antena que traía la señal desde la emisora. Este tipo de propagación recibe el nombre de propagación en línea de vista.

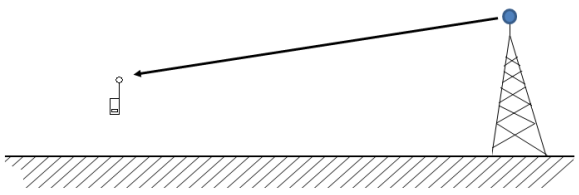


Figura 91. Propagación en línea de vista

Este modo de propagación es el más eficiente, ya que no existe pérdida de energía por reflexión.

El segundo modo de propagación, se ilustra en la figura 92, corresponde al hecho de que el plano de tierra actúa como una equipotencial, es decir una superficie reflectante.

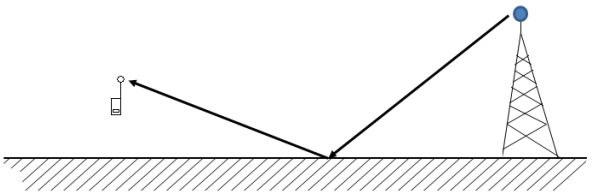


Figura 92. Propagación por reflexión en el plano de tierra

Este sistema de propagación se llama propagación por reflexión terrestre y es muy común en aplicaciones de radio frecuencia (RF).

Un tercer modo de propagación, comúnmente usado en radio difusión y por los radioaficionados, es la propagación por reflexión atmosférica, las diferentes capas de las atmósfera, debido a su diferente densidad y nivel de ionización, reflejan como superficies conductoras las señales en frecuencias medias y altas (MF-HF- VHF). Las ondas de frecuencias más altas, como UHF y superiores, ya no se reflejan, por lo que no se propagan por este tipo de reflexión.

La reflexión atmosférica facilita que las ondas alcancen receptores en grandes distancias, superando la curvatura de la tierra y la línea de vista, así se pueden sintonizar bajo ciertas condiciones atmosféricas, señales provenientes de Europa, Asia u Oceanía.

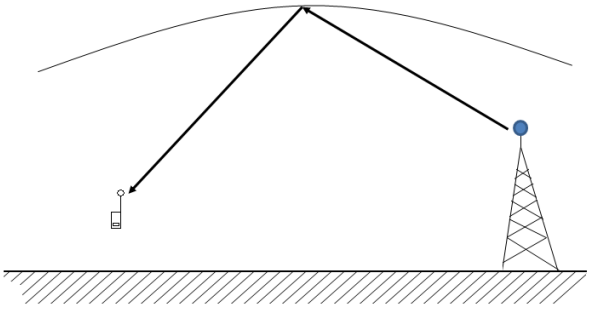


Figura 93. Propagación por reflexión atmosférica

La reflexión atmosférica, sin embargo, presenta como inconveniente que la recepción óptima de las señales cambia de acuerdo con la hora del día y las condiciones atmosféricas, debido a que la atmósfera, por efecto del intercambio térmico, tiende a dilatarse o contraerse, lo que ocasiona cambio en las alturas de reflexión e incremento de la atenuación por tener diferentes distancias para llegar hasta el receptor.

Las tormentas solares y la aparición de manchas solares, que afectan la ionósfera terrestre, tienden a producir fallas en las comunicaciones por reflexión atmosférica, lo cual le resta confiabilidad al modo de propagación.

Para superar los inconvenientes de la reflexión atmosférica, en las bandas UHF y superiores, se usan otros modos de propagación, como es la instalación de múltiples sistemas repetidores en línea de vista, como en los enlaces de microondas o usando la retransmisión vía satélite, como se ilustra en las figuras 94 y 95.

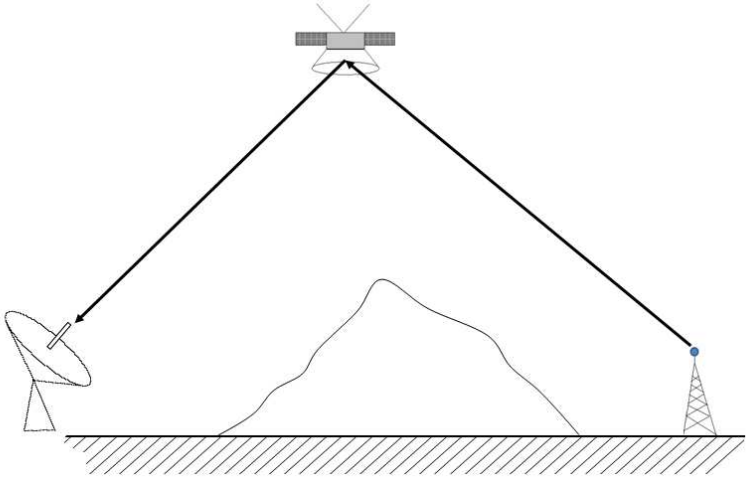


Figura 94. Propagación por retransmisión vía satélite

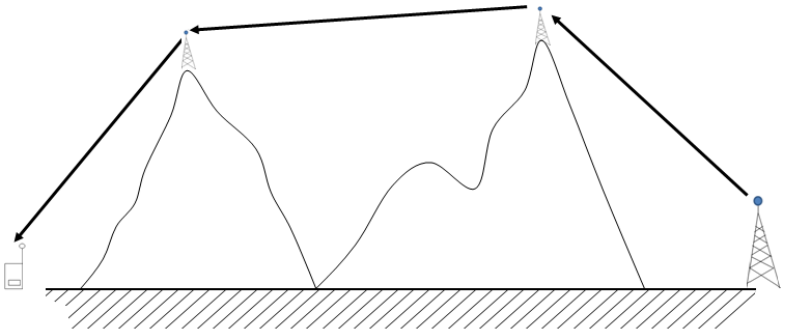


Figura 95. Propagación a través de enlaces de microondas

En sitios donde la topografía es agreste o existen montañas muy altas con valles profundos, las ondas electromagnéticas de cierta frecuencia pueden también propagarse por reflexión múltiple, según se muestra en la figura 96. En ambientes urbanos, las señales EM también se propagan por reflexión en las paredes de edificios, puentes túneles o estructuras propias del paisaje urbano. La única condición necesaria para este tipo de propagación es que la longitud de onda de la señal sea comparable a las dimensiones de la estructura reflectante o considerablemente inferior.

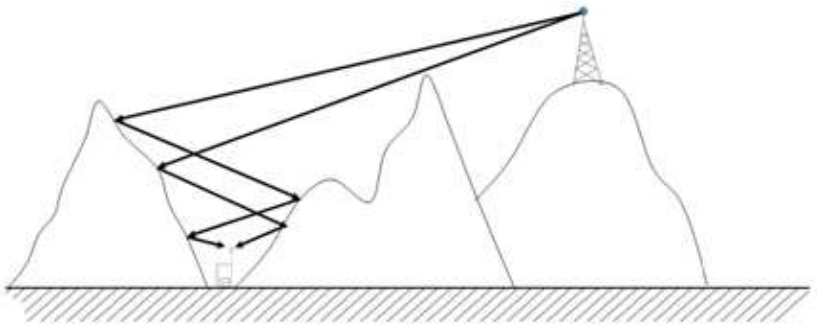


Figura 96. Propagación por reflexión múltiple

Polarización de ondas EM

Las ondas electromagnéticas, consideradas hasta el momento, se caracterizan porque el campo eléctrico se encuentra dirigido en una sola dirección, bien sea Y o Z mientras la onda se desplaza en dirección X.

Esto, sin embargo, es el caso menos común, ya que las ondas EM se originan de forma natural por el estado de agitación de los dipolos propios de la estructura de la materia cuando son excitados por calor u otra forma de energía.

La forma en que se manifiestan las diferentes componentes del campo eléctrico y la relación que existe entre ellas se llama polarización de la onda y se pueden considerar varios casos.

El modo de polarización de una onda está caracterizado por la diferencia de fase y amplitud entre las componentes transversales de campo electromagnético que generan la onda electromagnética. La forma general del campo eléctrico de una onda que se desplaza en dirección X, se encuentra representada por la siguiente ecuación:

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\left(E_y\,\vec{a}_y+E_z\,\vec{a}_z\right)e^{j(\omega t\pm\beta x)}$$

En el caso de que una de las componentes transversales se haga cero, se dice que es una onda plana.

Los campos en dirección Y y Z no siempre tienen la misma amplitud o fase espacio-temporal, lo cual lleva a diferentes formas de polarización.

Polarización lineal

Se presenta cuando ambas componentes tienen diferente amplitud pero se encuentran en fase o en contrafase exacta, se genera entonces una suma o resta aritmética de las señales en cada punto del espacio, lo cual conduce a que el campo resultante siempre tenga la misma dirección pero que ésta no necesariamente coincida con los ejes Yo Z.

La dirección del plano de polarización dentro del plano YZ queda definida por la diferencia de magnitudes de las señales.

Por ejemplo, si se tienen dos componentes:

$$E_y(t) = 4Cos(\omega t) \qquad E_z(t) = 3Cos(\omega t)$$

La figura resultante en el plano ZY corresponde a la mostrada en la figura 97.

La onda se desplaza en dirección X, pero el campo eléctrico vibra siempre dentro del mismo plano como se ve en la figura 98.

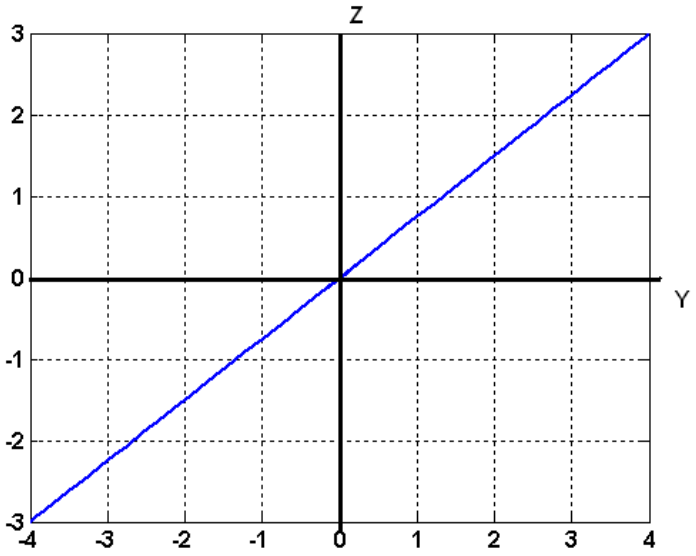


Figura 97. Polarización lineal

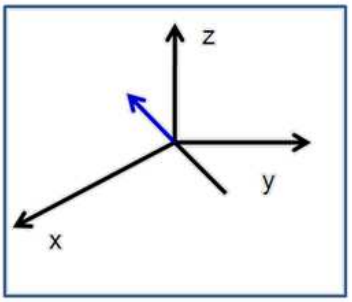


Figura 98. Desplazamiento de una onda polarizada linealmente

Polarización circular

Cuando ambas componentes tienen igual amplitud y se encuentran desfasadas 90º ó 270º entre sí. En este caso, se genera una onda polarizada circularmente, la dirección de giro del vector queda definida por la diferencia de fase de las señales.

Por ejemplo, si se tienen dos componentes:

$$E_y(t) = Cos(\omega t) \qquad E_z(t) = Cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La figura resultante en el plano ZY corresponde a la mostrada en la figura 99.

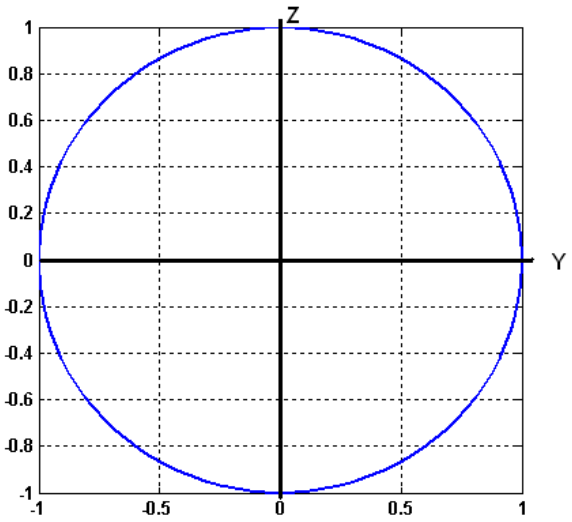


Figura 99. Polarización circular

La onda se desplaza en dirección X, pero el campo eléctrico vibra cambiando de plano, como se ve en la figura 100. La dirección del campo E forma una circunferencia a medida que se desplaza en dirección X.

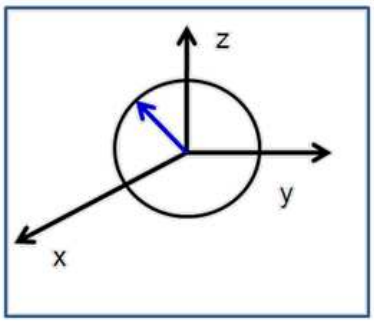


Figura 100. Desplazamiento de una onda polarizada circularmente

Polarización elíptica

Se genera cuando ambas componentes tienen diferente amplitud y el ángulo de fase entre ellas no es 0º ni 180º; en estos casos, se genera una onda polarizada en forma elíptica, el ángulo que forma el eje mayor de la elipse con el eje Z, así como la dirección de giro del vector queda definida por la diferencia de fase de las señales.

Por ejemplo, si se tienen dos componentes:

$$E_y(t) = Cos(\omega t) \qquad E_z(t) = Cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

La figura resultante en el plano ZY corresponde a la mostrada en la figura 101.

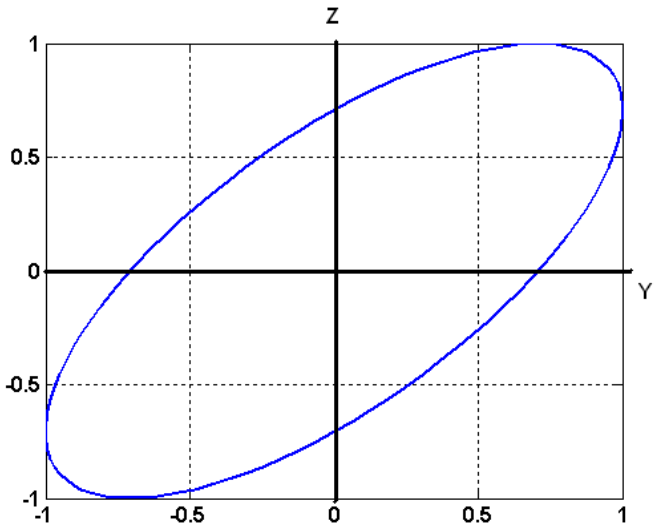


Figura 101. Polarización elíptica

La onda igual se desplaza en dirección X, pero el vector de campo eléctrico traza una elipse al desplazarse en dirección X, como se muestra en la figura 102.

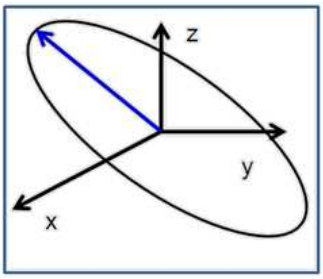


Figura 102. Desplazamiento de una onda polarizada elípticamente

Existen sustancias capaces de modificar la polarización de las ondas electromagnéticas que las atraviesan, bien sea porque poseen impedancias intrínsecas diferentes dependientes del

ángulo de incidencia de la onda o porque son sustancias anisotrópicas frente al campo eléctrico.[26]

A este tipo de sustancias se les llama polarizadores o sustancias "Polaroid" y permiten obtener ondas polarizadas linealmente, a partir de ondas polarizadas elíptica o circularmente, como se muestra en la figura 103.

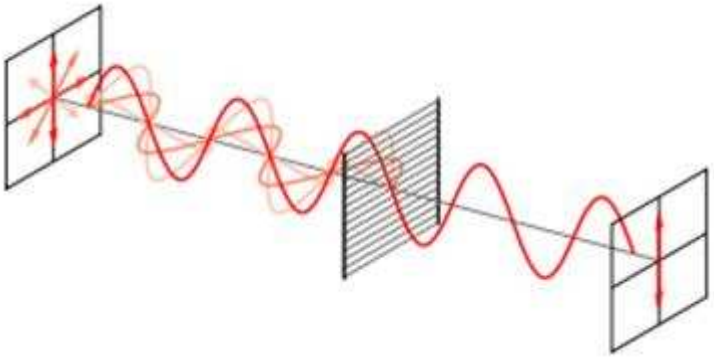


Figura 103. Polarización por absorción selectiva a través de un polarizador anisotrópico

Incidencia sobre un plano normal

Cuando una onda electromagnética plana atraviesa perpendicularmente el plano que separa dos medios de diferente impedancia intrínseca, como se muestra en la figura 104, los campos eléctrico y magnético son tangenciales a la superficie de contacto, por lo que deben cumplir las condiciones de frontera para campos tangenciales:

$$H_{1T} - H_{2T} = K$$

$$E_{1T} = E_{2T}$$

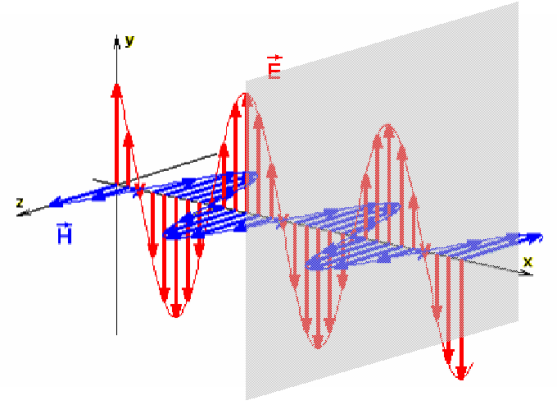


Figura 104. Onda que atraviesa un plano normal de incidencia

[26] Sustancias anisotrópicas son aquellas cuyas propiedades físicas cambian dependiendo de la dirección en que se midan.

Cuando no existe una densidad lineal de corriente en la frontera, los campos magnéticos a ambos lados de la frontera deben ser iguales entre sí, al igual que los campos eléctricos, pero esto no es posible, dado que en esta caso se llegaría a una contradicción inmediata, por cuanto el campo magnético es igual al campo eléctrico dividido por la impedancia intrínseca.

$$H_{z1} = H_{z2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{E_{y1}}{\eta_1} = \frac{E_{y2}}{\eta_2}$$

Por condiciones de frontera se sabe que $E_{y1} = E_{y2}$

Así que la única manera de cumplir las condiciones de frontera simultáneamente es que:

$$\eta_1 = \eta_2$$

Lo cual se descarta de plano ya que se trata de dos medios diferentes.

Para solucionar esta contradicción, se supone la existencia de una onda reflejada que se suma con la onda incidente dando origen a una onda total, la cual cumple las condiciones de frontera.

La onda incidente se nota con un superíndice positivo, mientras la reflejada lo hace mediante un superíndice negativo.

$$E_{ys1} = E_{y1}^{+} + E_{y1}^{-} \qquad\qquad H_{zs1} = H_{z1}^{+} + H_{z1}^{-}$$

$$E_{ys1} = E_{ys2} \qquad\qquad H_{zs1} = H_{zs2}$$

Los campos incidentes, eléctrico y magnético están relacionados por la impedancia intrínseca del medio, pero los campos reflejados tienen una dirección contraria a la de los campos incidentes, por lo que la relación entre ellos es el negativo de dicha impedancia:[27]

$$H_{z1}^{+} = \frac{E_{y1}^{+}}{\eta_1} \qquad\qquad H_{z1}^{-} = -\frac{E_{y1}^{-}}{\eta_1}$$

La onda electromagnética que atraviesa la frontera tiene la misma dirección de propagación de la onda incidente, dada la naturaleza tangencial de los campos eléctrico y magnético que la componen, por lo tanto se puede notar con un superíndice positivo.

[27] El signo negativo en el campo magnético reflejado obedece a que es el rotacional del campo eléctrico reflejado, y por ley de la mano derecha surge el signo negativo.

De esta manera, las condiciones de frontera quedan:

$$H_{zs1} = H^{+}_{zs2} = \frac{E^{+}_{y1}}{\eta_1} - \frac{E^{-}_{y1}}{\eta_1}$$

$$\frac{E^{+}_{ys2}}{\eta_2} = \frac{E^{+}_{y1}}{\eta_1} - \frac{E^{-}_{y1}}{\eta_1}$$

Por otra parte, la suma de campos eléctricos en el primer medio debe ser igual al campo resultante en el segundo medio:

$$E^{+}_{y1} + E^{-}_{y1} = E^{+}_{ys2}$$

Despejando en la primera ecuación:

$$E^{+}_{ys2} = \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(E^{+}_{y1} - E^{-}_{y1}\right)$$

Reemplazando en la segunda se obtiene:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(E^{+}_{y1} - E^{-}_{y1}\right) = E^{+}_{y1} + E^{-}_{y1}$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1}E^{+}_{y1} - E^{+}_{y1} = \frac{\eta_2}{\eta_1}E^{-}_{y1} + E^{-}_{y1}$$

Sumando fraccionarios

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1}E^{+}_{y1} = \frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_1}E^{-}_{y1}$$

De donde se obtiene:

$$E^{-}_{y1} = E^{+}_{y1}\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Es decir, el campo eléctrico reflejado es proporcional al campo incidente y a la diferencia entre las impedancias intrínsecas de los medios.

Coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión

Coeficiente de reflexión

Se llama coeficiente de reflexión a la relación entre el campo incidente y el campo reflejado.

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

El coeficiente de reflexión es en principio un número complejo. El campo reflejado expresado como función del coeficiente de reflexión queda:

$$E_{y1}^{-} = \Gamma E_{y1}^{+}$$

De forma semejante se obtiene la onda de campo magnético reflejada:

$$H_{z1}^{-} = -\frac{E_{y1}^{-}}{\eta_1}$$

$$H_{z1}^{-} = -\frac{E_{y1}^{+}}{\eta_1}\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -H_{z1}^{+}\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$H_{z1}^{-} = -\Gamma H_{z1}^{+}$$

Al analizar la expresión obtenida para el coeficiente de reflexión, se encuentran claramente tres situaciones extremas:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Caso 1. Que la impedancia del medio 2 sea mucho mayor que la del medio 1, haciendo que ésta sea despreciable.

$$\eta_2 \gg \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de reflexión tiene a 1 y la totalidad del campo incidente se refleja hacia el medio 1. El campo reflejado se encontraría en fase con el campo incidente.

Caso 2. Que la impedancia del medio 2 sea mucho menor que la del medio 1, siendo casi despreciable.

$$\eta_2 \ll \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de reflexión tiene a -1 y nuevamente la totalidad del campo incidente se refleja hacia el medio 1, pero el campo reflejado se encontraría en contrafase con el campo incidente.

Caso 3. Que la impedancia del medio 2 sea igual a la del medio 1.

$$\eta_2 = \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de reflexión se hace cero; no habría campo reflejado.

El análisis de los tres casos, lleva a concluir que en cualquiera de ellos, el coeficiente de reflexión tiene una magnitud siempre igual o menor a uno en magnitud y ocupa una región en el plano complejo como la mostrada en la figura 105.

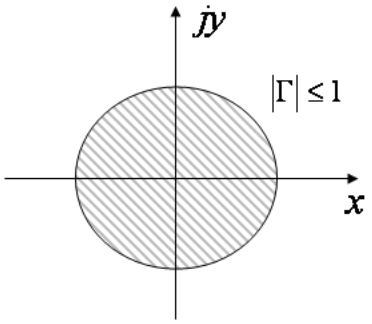


Figura 105. Región de operación del coeficiente de reflexión

Coeficiente de transmisión

Se denomina coeficiente de transmisión a la relación entre el campo transmitido y el campo incidente.

$$\tau = \frac{E^+_{ys2}}{E^+_{y1}}$$

El coeficiente de transmisión es también un numero complejo, cuya magnitud es igual a la relación de magnitudes entre el campo incidente y el transmitido, mientras que su fase es la relación de fase entre los mismos campos.

En términos del campo incidente y el reflejado se tiene:

$$\tau = \frac{E^+_{ys2}}{E^+_{y1}} = \frac{E^+_{y1} + E^-_{y1}}{E^+_{y1}}$$

Dividiendo por el campo incidente:

$$\tau = 1 + \frac{E^-_{y1}}{E^+_{y1}} = 1 + \Gamma$$

Por lo que el coeficiente de transmisión ocupa un lugar geométrico igual al del coeficiente de reflexión, es decir, un círculo unitario, pero desplazado en el plano complejo en una unidad real. Como se muestra en la figura 106.

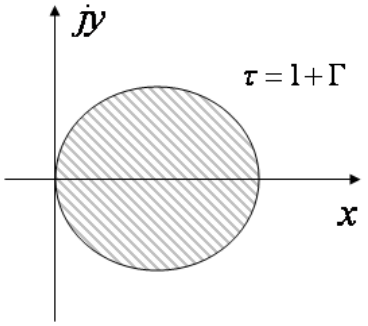


Figura 106. Región de operación del coeficiente de transmisión

En términos de las impedancias de los medios el coeficiente de transmisión queda:

$$\tau = 1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Resolviendo:

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

Si se analizan los mismos casos extremos que en el caso del coeficiente de reflexión se tiene:

Caso 1. Que la impedancia del medio 2 sea mucho mayor que la del medio 1, haciendo que ésta sea despreciable.

$$\eta_2 \gg \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de transmisión tiene a 2, el campo transmitido se encontraría en fase con el campo incidente y tendría el doble de su amplitud.

Caso 2. Que la impedancia del medio 2 sea mucho menor que la del medio 1 siendo casi despreciable.

$$\eta_2 \ll \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de transmisión tiende a cero; la totalidad del campo incidente se refleja hacia el medio 1.

Caso 3. Que la impedancia del medio 2 sea igual a la del medio 1.

$$\eta_2 = \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de transmisión se hace unitario; no habría campo reflejado.

Este coeficiente de transmisión tiene una magnitud siempre igual o menor a dos.

Ejemplo 78. Reflexión en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 1.5GHz, 100mW/m2, incide desde el aire, en forma perpendicular sobre una pared infinita con una impedancia intrínseca $\eta_2 = 250\Omega$.

Calcule el coeficiente de reflexión y transmisión.

Solución:

Coeficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{250 - 120\pi}{250 + 120\pi} = -0.2 = 0.2 < 180^0$$

Coeficiente de transmisión:

$$\tau = 1 + \Gamma = 0.8$$

Potencia incidente y reflejada

Debido a la presencia de campos incidentes y reflejados, que viajan en direcciones opuestas, una parte de la energía transportada por la señal original se regresa al medio de origen.

En los cálculos de balance de potencia se deben tomar en cuenta las componentes incidente y reflejada.

Para el caso de la potencia incidente, el vector de Poynting tiene la misma ecuación que para el caso de los medios no acotados.

$$P_1^+ = \frac{\left|E_{01}^+\right|^2}{2|\eta_1|} e^{-2\alpha x} Cos\theta_{\eta 1}$$

El vector de Poynting incidente en valores RMS queda:

$$P_1^+ = \frac{\left|E_{01-RMS}^+\right|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} Cos\theta_{\eta 1}$$

Para el vector de Poynting reflejado, se usa la impedancia intrínseca del medio hacia el cual retorna la potencia, y la magnitud del campo reflejado:

$$P_1^- = \frac{\left|E_{01-RMS}^-\right|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} Cos\theta_{\eta 1}$$

Dado que el campo reflejado es proporcional al campo incidente:

$$E_{y1}^{-} = \Gamma E_{y1}^{+}$$

Se puede expresar el vector de Poynting reflejado como:

$$P_1^{-} = \left|\Gamma\right|^2 \frac{\left|E_{01-RMS}^{+}\right|^2}{\left|\eta_1\right|} e^{-2\alpha x} Cos\,\theta_{\eta 1}$$

En términos de la potencia incidente:

$$P_1^{-} = \left|\Gamma\right|^2 P_1^{+}$$

Reflectancia

La relación entre la potencia reflejada y la potencia incidente es una cantidad denominada reflectancia (R) e indica la capacidad de reflejar energía electromagnética que posee una determinada superficie.

$$R = \frac{P_1^{-}}{P_1^{+}} = \left|\Gamma\right|^2$$

La potencia reflejada en términos del vector de Poynting incidente queda:

$$P_1^{-} = RP_1^{+}$$

Transmitancia

Para el caso de la potencia transmitida, por ley de conservación de la energía se tiene que la potencia transmitida debe ser la diferencia entre la potencia incidente y la reflejada:

$$P_2^{+} = P_1^{+} - P_1^{-}$$

En términos de la reflectancia queda:

$$P_2^{+} = P_1^{+} - RP_1^{+} = \left(1 - R\right)P_1^{+}$$

En términos del coeficiente de reflexión:

$$P_2^{+} = \left(1 - \left|\Gamma\right|^2\right)P_1^{+}$$

La relación entre la potencia transmitida y la potencia incidente se denomina transmitancia (T) y representa la capacidad que tiene una superficie de transmitir la potencia que incide sobre ella.

$$T = \frac{P_2^{+}}{P_1^{+}} = \left(1 - \left|\Gamma\right|^2\right)$$

La potencia transmitida en términos del vector de Poynting incidente queda:

$$P_2^+ = TP_1^+$$

Principio de conservación de la energía se debe cumplir siempre que:

$$R + T = 1$$

Ejemplo 79. Potencia reflejada en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 1.5GHz, 100mW/m2, incide desde el aire, en forma perpendicular sobre una pared infinita con una impedancia intrínseca $\eta_2 = 250\Omega$.

Calcule la potencia reflejada y la potencia transmitida a la pared.

Solución:

Coeficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{250 - 120\pi}{250 + 120\pi} = -0.2 = 0.2 < 180^0$$

La reflectancia es de:

$$R = |\Gamma|^2 = 0.2^2 = 4\%$$

La transmitancia:

$$T = 1 - R = 96\%$$

La potencia reflejada:

$$|P_1^-| = 4\% \times 100\frac{mW}{m^2} = 4\ mW/m^2$$

La potencia transmitida:

$$|P_2^+| = 96\% \times 100\frac{mW}{m^2} = 96\ mW/m^2$$

Reflexión total y ondas estacionarias

Cuando una onda incide de forma perpendicular a la frontera entre un dieléctrico sin pérdidas y un conductor perfecto se presenta una condición particular de reflexión de ondas denominada reflexión total.

Dado que la impedancia intrínseca de un conductor perfecto es cero, el coeficiente de reflexión es -1 y el coeficiente de transmisión se hace cero, por lo tanto:

$$E_{y1}^- = -E_{y1}^+ \qquad E_{ys2}^+ = 0 = E_{y1}^+ + E_{y1}^-$$

El campo total queda entonces expresado en forma de vectores complejos queda:

$$E_{ys1}^{+} = E_{y1}^{+} + E_{y1}^{-} = E_{y1}^{+}\left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)e^{j\omega t}$$

El cambio de signo en la componente espacial de fase (βx) obedece al desplazamiento en dirección contraria del campo reflejado con respecto al campo incidente.

De acuerdo con la ecuación de Euler:

$$e^{j\beta x} = Cos(\beta x) + jSen(\beta x)$$

$$e^{-j\beta x} = Cos(\beta x) - jSen(\beta x)$$

La diferencia se puede expresar como:

$$e^{j\beta x} - e^{-j\beta x} = 2jSen(\beta x) = 2Sen(\beta x)e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Reemplazando en el vector de campo y obteniendo la parte real del mismo se obtiene una ecuación de campo igual a:

$$E_{ys1}^{+} = 2E_{y0}^{+}Sen(\beta x)Sen(\omega t)$$

En estas circunstancias, la onda deja de ser viajera y se convierte en una onda pulsante con la misma frecuencia de la onda incidente, pero que duplica su amplitud, como resultado de dos ondas de igual amplitud que se propagan en direcciones exactamente contrarias, como se muestra en la figura 107.

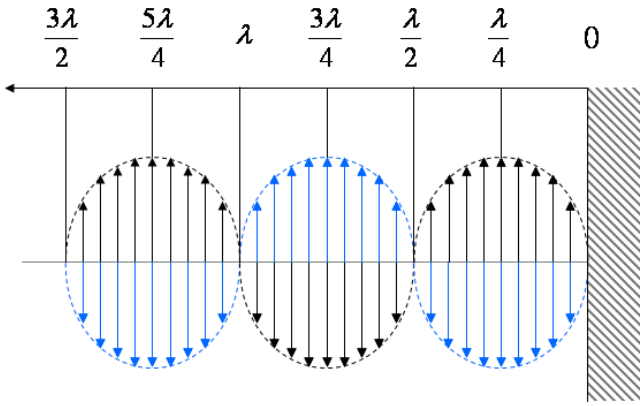


Figura 107. Ondas electromagnéticas estacionarias formadas en una frontera conductor dieléctrico

El vector de campo sigue vibrando de forma armónica con el tiempo, solo que los valores máximos y mínimos de campo, ya no se desplazan en el espacio, sino que ocupan posiciones fijas.

Máximos de campo eléctrico

Se tienen puntos sobre el eje de propagación que cumplen la condición:

$$|Sen(\beta x)| = 1$$

Que corresponden a valores de campo de máxima amplitud de campo eléctrico pulsante. Para ubicar estos puntos, basta saber que la función seno se hace máxima en los múltiplos enteros impares de $\frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto, se puede concluir que los puntos máximos en intensidad de campo eléctrico se ubican en posiciones **x** que cumplen:

$$\beta x = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n = 1,2,3\cdots\infty$$

En estos puntos, el campo eléctrico tiene carácter pulsante al doble de la amplitud de la señal original.

Para ubicar estos puntos se hace uso de la ecuación:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por la cual:

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n = 1,2,3\cdots\infty$$

Despejando x se obtiene:

$$x = (2n-1)\frac{\pi}{2} \times \frac{\lambda}{2\pi} = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

Es decir que los valores máximos de campo eléctrico se encuentran ubicados cada múltiplo impar de $\frac{\lambda}{4}$ contado hacia atrás desde la frontera.

Mínimos de campo eléctrico

Existen otros puntos que cumplen con:

$$|Sen(\beta x)| = 0$$

Que corresponden a valores de campo de mínima amplitud de campo eléctrico pulsante. Para ubicar estos puntos, basta saber que la función seno se hace cero en los múltiplos enteros de π.

Por lo tanto, se puede concluir que los puntos mínimos en intensidad de campo eléctrico se ubican en posiciones **x** que cumplen:

$$\beta x = (n-1)\pi \quad ; \quad n = 1,2,3\cdots\infty$$

En estos puntos, el campo eléctrico permanece en un valor nulo en cualquier instante de tiempo.

Usando:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (n-1)\pi \quad ; \quad n = 1,2,3\cdots\infty$$

Despejando **x**:

$$x = (n-1)\pi \times \frac{\lambda}{2\pi} = (n-1)\frac{\lambda}{2}$$

Estos puntos se encuentran en los múltiplos enteros de $\frac{\lambda}{2}$.

La distancia entre dos máximos consecutivos, al igual que entre dos mínimos consecutivos es de $\frac{\lambda}{2}$, tal como se muestra en la figura 107.

Ejemplo 80. Reflexión total en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 2.4GHz, 100mW/m2, incide desde el aire, en forma perpendicular sobre una pared infinita superconductora.

¿A qué distancia de la pared se produce el primer máximo y el primer mínimo de campo eléctrico y cuál es la magnitud del primer máximo?

Solución:

La impedancia intrínseca del aire es: $\eta_0 = 120\pi\Omega$

La amplitud del campo incidente se obtiene a partir del vector de Poynting incidente:

$$P_1^+ = \frac{\left|E_{01-RMS}^+\right|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} Cos\theta_{\eta 1}$$

Despreciando las pérdidas en el aire:

$$P_1^+ = \frac{\left|E_{01-RMS}^+\right|^2}{|120\pi|} Cos0^0$$

Despejando:

$$\left|E_{1\_RMS}^{+}\right|^2 = 120\pi \times 0.1\ W/m^2$$

$$\left|E_{1\_RMS}^{+}\right| = 6.14\ V_{RMS}/m$$

La longitud de onda en el aire se calcula como:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{2.4 \times 10^9 Hz} = 12.5\ cm$$

El primer máximo se encuentra en: $x = (2n-1)\frac{\lambda}{4}\ ; n = 1$

Reemplazando: $x = (2-1) \times \frac{12.5cm}{4} = 3.12cm$

El primer mínimo se encuentra en: $x = (n-1)\frac{\lambda}{2}\ ; n = 1$

Es decir, justo en la frontera. El segundo mínimo se encuentra en: $x = (n-1)\frac{\lambda}{2}\ ; n = 2$

Reemplazando: $x = (2-1) \times \frac{12.5cm}{2} = 6.25cm$

La magnitud del campo máximo es:

$$|E|_{MAX} = 2\left|E_{1\_RMS}^{+}\right| = 12.28\ V_{RMS}/m$$

Reflexión parcial

En el caso de no presentarse la reflexión total, de todas formas pueden acontecer condiciones especiales debido a la suma de las ondas incidentes y reflejadas en una frontera entre dos medios de diferente impedancia intrínseca.

En este caso, el campo total en el medio 1 queda dado por la suma:

$$E_{ys1}^{+} = E_{y1}^{+} + E_{y1}^{-}$$

$$E_{ys1}^{+} = \left|E_{y1}^{+}\right| e^{-j\beta x} + \Gamma \left|E_{y1}^{+}\right| e^{j\beta x}$$

Nuevamente, el cambio de signo en la componente espacial de fase (βx) obedece al desplazamiento en dirección contraria del campo reflejado con respecto al campo incidente.

El coeficiente de reflexión es un número complejo, por lo que se puede expresar en notación exponencial como:

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}$$

Reemplazando:

$$E^+_{ys1} = \left|E^+_{y1}\right| e^{-j\beta x} + \left|\Gamma\right|\left|E^+_{y1}\right| e^{j\beta x} e^{j\theta_\Gamma}$$

Se hace factor común del campo incidente:

$$E^+_{ys1} = \left(e^{-j\beta x} + \left|\Gamma\right| e^{j(\beta x + \theta_\Gamma)}\right)\left|E^+_{y1}\right|$$

Se tiene una suma de vectores en el plano complejo, cuyo ángulo de fase cambia a medida que cambia la variable x.

Sin embargo, debido a que un vector tiene signo negativo y el otro signo positivo, giran en direcciones contrarias, como se muestra en la figura 108.

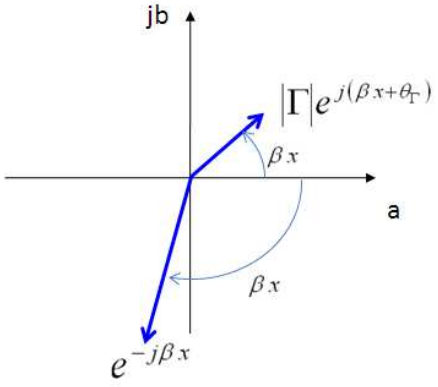


Figura 108. Ubicación en el plano complejo de los vectores de campo incidente y reflejado. Las flechas indican la variación de los ángulos a medida que aumenta la distancia **x**

Es claro que el campo total alcanza su mayor valor siempre que los vectores al interior del paréntesis se encuentren en fase, y su menor valor cuando se encuentren en oposición de fase, ya que se produce la suma aritmética o la resta aritmética de los campos según sea el caso.

La condición de campo máximo se cumple cuando los dos vectores se encuentren desfasados en un múltiplo entero de $2\pi\ radianes$:

$$E^+_{ys1}\Big|_{MAX} \quad \rightarrow \quad \beta x + \theta_\Gamma = -\beta x + 2n\pi \quad ; \quad n = 0,1,2.....\infty$$

Despejando x:

$$2\beta x = 2n\pi - \theta_\Gamma \quad ; \quad n = 0,1,2.....\infty$$

$$x = \frac{2n\pi}{2\beta} - \frac{\theta_\Gamma}{2\beta} \quad ; \quad n = 0,1,2.....\infty$$

Dado que: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$x = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \quad ; \quad n = 0,1,2.....\infty$$

Los valores máximos del campo se encuentran separados por una distancia igual a la mitad de la longitud de onda, tal como en el caso de las ondas estacionarias por reflexión total, y el valor de dichos máximos es igual a la suma de las magnitudes de los vectores que se encuentran en fase, es decir:

$$E_{ys1}^{+}\Big|_{MAX} = \left(1 + |\Gamma|\right)\left|E_{y1}^{+}\right|$$

El ángulo θ_Γ es un ángulo formado entre la diferencia y la suma de dos impedancias complejas η_2 y η_1, por lo que varía en un rango máximo de $0 < \theta_\Gamma < \pi$.

En estos rangos de variación, la distancia entre la frontera entre los medios y la posición del primer valor máximo de campo varía entre:

$$0 < x < \frac{\lambda}{4}$$

Se debe tener cuidado al identificar la posición del primer máximo de campo, ya que se puede dar que al reemplazar n=0, el primer máximo quede ubicado en un valor de la coordenada x negativo. En este caso, no se toma en cuenta y se pasa al siguiente máximo n=1.

Cuando se tiene un valor mínimo de campo, la condición que se cumple es por lo tanto:

$$E_{ys1}^{+}\Big|_{MIN} \quad \rightarrow \quad \beta x + \theta_\Gamma = -\beta x + (2n-1)\pi \quad ; \quad n = 1,2.....\infty$$

$$2\beta x = (2n-1)\pi - \theta_\Gamma \quad ; \quad n = 1,2.....\infty$$

$$x = \frac{(2n-1)\pi}{2\beta} - \frac{\theta_\Gamma}{2\beta} \quad ; \quad n = 1,2.....\infty$$

Dado que: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$x = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \quad ; \quad n = 1,2.....\infty$$

Los valores mínimos del campo también se encuentran separados por una distancia igual a la mitad de la longitud de onda, y el valor de dichos mínimos es igual a la diferencia de las magnitudes que se encuentran en oposición de fase, es decir:

$$E_{ys1}^{+}\Big|_{MIN} = \left(1 - |\Gamma|\right)\left|E_{y1}^{+}\right|$$

El comportamiento entonces es semejante al que se observa en la figura 109.

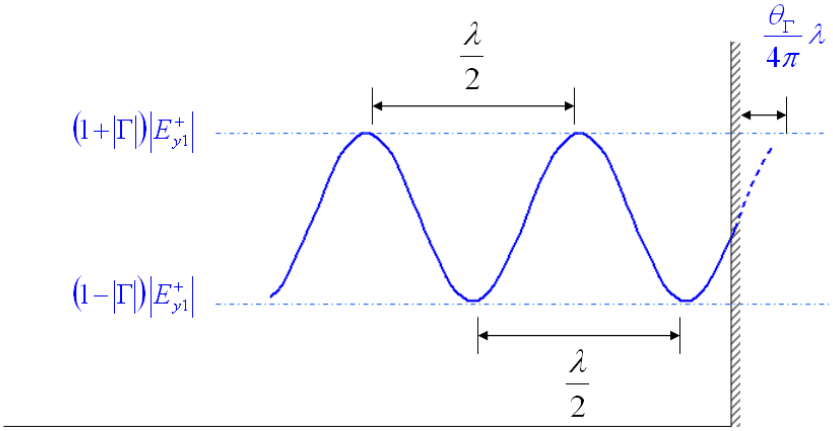


Figura 109. Comportamiento de la amplitud máxima del campo eléctrico en un caso de reflexión parcial

El campo resultante en casos en los cuales el coeficiente de reflexión es diferente de la unidad queda representado por:

$$E_{ys1}^{+} = \left(e^{-j\beta x} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_\Gamma)}\right)\left|E_{y1}^{+}\right|$$

Esta expresión se puede manipular matemáticamente multiplicándola y dividiéndola por una misma cantidad sin alterarla, como se muestra a continuación:

$$E_{ys1}^{+} = \left|E_{y1}^{+}\right|\left(e^{-j\beta x} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_\Gamma)}\right) \times e^{-j\frac{\theta_\Gamma}{2}} \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

$$E_{ys1}^{+} = \left|E_{y1}^{+}\right|\left(e^{-j\beta x} e^{-j\frac{\theta_\Gamma}{2}} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_\Gamma)} e^{-j\frac{\theta_\Gamma}{2}}\right) \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Simplificando

$$E_{ys1}^{+} = \left|E_{y1}^{+}\right|\left(e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + |\Gamma| e^{j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}\right) \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Se puede agregar y restar un mismo término sin alterar la ecuación:

$$E_{ys1}^{+}=\left|E_{y1}^{+}\right|\left(e^{-j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}+\left|\Gamma\right|e^{j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}+\left|\Gamma\right|e^{-j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}-\left|\Gamma\right|e^{-j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}\right)\times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Reduciendo

$$E_{ys1}^{+}=\left|E_{y1}^{+}\right|\left[\left(1-\left|\Gamma\right|\right)e^{-j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}+\left|\Gamma\right|\left(e^{j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}+e^{-j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}\right)\right]\times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Aplicando la identidad de Euler

$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2Cos\theta$$

$$E_{ys1}^{+}=\left|E_{y1}^{+}\right|\left[\left(1-\left|\Gamma\right|\right)e^{-j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}+2\left|\Gamma\right|Cos\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)\right]\times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Pasando al dominio del tiempo se obtiene:

$$E_{ys1}^{+}(x,t)=\left|E_{y1}^{+}\right|\mathrm{Re}\left[\left(1-\left|\Gamma\right|\right)e^{-j\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}+2\left|\Gamma\right|Cos\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)\right]\times e^{j\left(\omega t+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}$$

$$E_{ys1}^{+}(x,t)=\left(1-\left|\Gamma\right|\right)\left|E_{y1}^{+}\right|Cos(\omega t-\beta x)+2\left|\Gamma\right|\left|E_{y1}^{+}\right|Cos\left(\omega t+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)Cos\left(\beta x+\frac{\theta_\Gamma}{2}\right)$$

En donde se distinguen claramente dos componentes del campo eléctrico:

Una componente en forma de onda viajera de amplitud $\left(1-\left|\Gamma\right|\right)\left|E_{y1}^{+}\right|$ que se propaga en dirección de la onda incidente y otra componente de amplitud $2\left|\Gamma\right|\left|E_{y1}^{+}\right|$ que es pulsante y estacionaria.

De esta forma, la onda resultante es la suma de las dos componentes, las cuales dan origen a la onda que se aprecia en la figura 109.

Relación de onda estacionaria ROE

A la relación entre la amplitud máxima y la amplitud mínima de campo eléctrico se le denomina relación de onda estacionaria ROE y es equivalente a:

$$s = \frac{E^{+}_{ys1}\Big|_{MAX}}{E^{+}_{ys1}\Big|_{MIN}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

Esta relación se hace infinita cuando se presenta reflexión total, según se comentó anteriormente.

La relación de onda estacionaria suele notarse por la letra **S**, abreviatura de SWR, que en inglés proviene de Standing Wave Ratio.

Ejemplo 81. Reflexión parcial en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 1.5GHz, 100mW/m2 incide desde el aire en forma perpendicular sobre una pared infinita con una impedancia intrínseca $\eta_2 = 250\Omega$.

Calcule la ubicación y la amplitud del primer máximo de campo eléctrico, así como la ROE.

Solución:

Coeficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{250 - 120\pi}{250 + 120\pi} = -0.2 = 0.2 < 180^0$$

La impedancia intrínseca del aire es: $\eta_0 = 120\pi\Omega$

La amplitud del campo incidente se obtiene a partir del vector de Poynting incidente:

$$P_1^{+} = \frac{\left|E^{+}_{01-RMS}\right|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} Cos\theta_{\eta 1}$$

Despreciando las pérdidas en el aire:

$$P_1^{+} = \frac{\left|E^{+}_{01-RMS}\right|^2}{|120\pi|} Cos0^0$$

Despejando:

$$\left|E^{+}_{1\_RMS}\right|^2 = 120\pi \times 0.1\ W/m^2$$

$$\left|E^{+}_{1\_RMS}\right| = 6.14\ V_{RMS}/m$$

La longitud de onda en el aire se calcula como:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{1.5 \times 10^9 Hz} = 20\ cm$$

Distancia al primer máximo desde la frontera:

$$x = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \qquad n = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{4\pi} \times 20\text{cm} = -15\text{cm}$$

No tiene sentido, por lo que se descarta y se toma el siguiente:

$$x = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \qquad n = 1$$

$$x = 10\text{cm} - \frac{\pi}{4\pi} \times 20\text{cm} = 5\text{cm}$$

Magnitud del primer máximo:

$$E_{y1}^{+}\big|_{MAX} = (1 + |\Gamma|)E_{y1}^{+}$$

$$E_{y1}^{+}\big|_{MAX} = (1 + 0.2) \times 6.14V_{RMS} = 7.4V_{RMS}$$

La magnitud del campo mínimo:

$$E_{y1}^{+}\big|_{MIN} = (1 - 0.2) \times 6.14V_{RMS} = 4.9V_{RMS}$$

La ROE:

$$s = ROE = \frac{E_{y1}^{+}\big|_{MAX}}{E_{y1}^{+}\big|_{MIN}} = \frac{7.4}{4.9} = 1.5$$

Impedancia de entrada de una pared infinita

La impedancia de entrada cuando se presenta reflexión total o parcial debe tomar en cuenta ya no solo la impedancia del medio en el cual originalmente se propaga la onda, sino también la del medio que la refleja.

En forma general, la impedancia se mide como la relación entre las señales de entrada de campo eléctrico y campo magnético.

$$\eta_{in} = \frac{E_{ys1}}{H_{zs1}}$$

Cuando se emplean los vectores de campo se encuentra:

$$\eta_{in} = \frac{E_{ys1}}{H_{zs1}} = \frac{E_{y1}^{+}e^{j\beta x} + E_{y1}^{-}e^{-j\beta x}}{H_{z1}^{+}e^{j\beta x} + H_{z1}^{-}e^{-j\beta x}}$$

En términos del coeficiente de reflexión:

$$\eta_{in} = \frac{E_{y1}^{+} e^{j\beta x} + \Gamma E_{y1}^{+} e^{-j\beta x}}{H_{z1}^{+} e^{j\beta x} - \Gamma H_{z1}^{+} e^{-j\beta x}}$$

Se sacan por factor común las componentes de campo incidente:

$$\eta_{in} = \frac{E_{ys1}}{H_{zs1}} = \frac{E_{y1}^{+}}{H_{z1}^{+}} \frac{\left(e^{j\beta x} + \Gamma e^{-j\beta x}\right)}{\left(e^{j\beta x} - \Gamma e^{-j\beta x}\right)}$$

La relación entre los campos incidentes es la impedancia intrínseca del medio 1.

$$\eta_1 = \frac{E_{y1}^{+}}{H_{z1}^{+}}$$

Reemplazando:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\left(e^{j\beta x} + \Gamma e^{-j\beta x}\right)}{\left(e^{j\beta x} - \Gamma e^{-j\beta x}\right)}$$

Se puede apreciar claramente que la impedancia de entrada es un número complejo, cuya magnitud y ángulo son funciones de la distancia a la frontera **x**.

Al reemplazar el coeficiente de reflexión en términos de las impedancias de los dos medios se obtiene:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{e^{j\beta x} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} e^{-j\beta x}}{e^{j\beta x} - \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} e^{-j\beta x}}$$

Despejando:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\left(\eta_2 + \eta_1\right)e^{j\beta x} + \left(\eta_2 - \eta_1\right)e^{-j\beta x}}{\left(\eta_2 + \eta_1\right)e^{j\beta x} - \left(\eta_2 - \eta_1\right)e^{-j\beta x}}$$

Reagrupando términos:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2\left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right) + \eta_1\left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)}{\eta_1\left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right) + \eta_2\left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)}$$

De acuerdo con la identidad de Euler:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2Cos\theta$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2jSen\theta$$

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 Cos(\beta x) + j\eta_1 Sen(\beta x)}{\eta_1 Cos(\beta x) + j\eta_2 Sen(\beta x)}$$

Se divide por la función coseno en el numerador y denominador:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 Tan(\beta x)}{\eta_1 + j\eta_2 Tan(\beta x)}$$

Como se observa claramente, la impedancia de entrada no solo depende de las impedancias de los medios 1 y 2, sino también de la distancia a la frontera de la fuente de ondas electromagnéticas. Además, esta impedancia tiene una variación periódica dada por la función tangente, la cual tiene un periodo de π radianes. Es decir, el valor de la impedancia se repite cada vez que:

$$\beta x = n\pi$$

Despejando **x**:

$$x = \frac{n\pi}{\beta} = n\frac{\pi}{2\pi/\lambda} = n\frac{\lambda}{2}$$

La impedancia tiene mínimos y máximos espaciados, igual que los valores del campo eléctrico. Además, el valor de la impedancia de entrada se repite cada semilongitud de onda.

La ubicación espacial de los mínimos y máximos de impedancia, sin embargo, no coincide con la de los valores extremos de campo eléctrico, ya que los primeros deben tomar en cuenta la ubicación espacial de los mínimos y máximos del campo magnético.

La impedancia de entrada se puede expresar en términos de la longitud de onda de la señal en el medio 1, usando la equivalencia de la constante β.

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 Tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)}{\eta_1 + j\eta_2 Tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)}$$

La expresión queda:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 Tan\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)}{\eta_1 + j\eta_2 Tan\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)}$$

Distancia eléctrica y distancia física

La expresión $\frac{x}{\lambda}$ indica el número de longitudes de onda recorridos desde la frontera. Esta relación se denomina distancia eléctrica y se representa por la letra ℓ y se expresa en longitudes de onda.

Para encontrar la distancia física correspondiente a una distancia eléctrica determinada, se requiere conocer la longitud de onda y, por tanto, la constante de fase β.

En función de la distancia eléctrica, la impedancia de entrada queda como:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 Tan(2\pi\ \ell)}{\eta_1 + j\eta_2 Tan(2\pi\ \ell)}$$

Ejemplo 82. Impedancia de entrada en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 1.5GHz incide desde el aire en forma perpendicular sobre una pared infinita con una impedancia intrínseca $\eta_2 = 250\Omega$.

Calcule la impedancia de entrada en distancias de a) 2cm, b) 5cm, c) 12cm, d) 15cm. Medidas desde la pared.

Solución:

La impedancia intrínseca del aire es: $\eta_0 = 120\pi\Omega$

La longitud de onda en el aire se calcula como:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{1.5 \times 10^9 Hz} = 20\ cm$$

La impedancia de entrada en función de la distancia queda:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 Tan(2\pi\ \ell)}{\eta_1 + j\eta_2 Tan(2\pi\ \ell)}$$

Reemplazando valores:

$$\eta_{in} = 120\pi \frac{250 + j120\pi \times Tan(2\pi\ \ell)}{120\pi + j250 \times Tan(2\pi\ \ell)}$$

Para el primer caso:

$$\ell = \frac{x}{\lambda} = \frac{2cm}{20cm} = 0.1\lambda$$

Reemplazando:

$$\eta_{in} = 120\pi \frac{250 + j120\pi \times Tan(0.2\pi)}{120\pi + j250 \times Tan(0.2\pi)}$$

Evaluando:

$$\eta_{in} = (310 + j124)\Omega = 334\langle 22^0 \rangle \Omega$$

Para el segundo, tercer y cuarto casos: $\ell = 0.25\lambda \quad \ell = 0.6\lambda \quad \ell = 0.75\lambda$

Evaluando:

$$\eta_{in}(0.25\lambda) = 568\Omega = 568\langle 0^0 \rangle \Omega$$

$$\eta_{in}(0.6\lambda) = (310 + j124)\Omega = 334\langle 22^0 \rangle \Omega$$

$$\eta_{in}(0.75\lambda) = 568\Omega = 568\langle 0^0 \rangle \Omega$$

Los valores se repiten cada 0.5λ como se esperaba.

Propagación a través de una pared finita

Cuando se tiene una barrera de impedancia diferente a la del medio en donde se origina la onda, pero cuyo espesor es finito, las condiciones de cálculo de la impedancia de entrada cambian radicalmente, tal como se muestra en la figura 110.

En este caso, es necesario tomar en cuenta no solo la impedancia de la pared que separa las dos capas de aire, sino la impedancia de la capa de aire que se encuentra detrás de la pared.

Adicionalmente, al existir dos interfaces entre medios diferentes, se presenta una doble reflexión: en la primera interfaz, que separa el medio original de la pared, y otra, en la segunda interfaz, cuando la onda abandona la pared y avanza hacia el receptor.

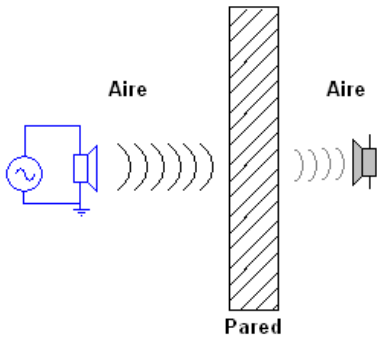


Figura 110. Ondas que se propagan a través de una pared finita

Considérese el caso de una onda electromagnética de 250MHz, $150V_{RMS}/m$, proveniente de un generador de ondas situado a 40cm. de la pared, que incide desde el aire en forma perpendicular sobre una pared con una impedancia intrínseca $\eta_2 = 200\Omega$ y 12cm. de espesor.

La pared está hecha de un material no magnético y no disipativo. Al otro lado de la pared se encuentra un receptor situado a 30cm. de distancia.

Considérense las siguientes preguntas:

- ¿Cuál será el coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión y la relación de onda estacionaria vistos por el generador?
- ¿Cuál es la magnitud del valor máximo de campo eléctrico del lado del generador?
- ¿Qué porcentaje de la potencia incidente se transmite al receptor?

En este caso, se hace necesario calcular las constantes de propagación en la pared y usarlas para aproximar los cálculos totales, considerando la contribución de ambos medios.

Como la pared está hecha de un material no magnético y no disipativo:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^2$$

$$\epsilon_r = \left(\frac{120\pi}{200}\right)^2 = 3.55$$

Ahora se puede calcular la constante de fase de la pared.

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_r}$$

$$\beta = \frac{2\pi \times 250 \times 10^6}{3 \times 10^8}\sqrt{3.55} = 9.87 \text{ rad/m}$$

La impedancia de entrada vista desde la primera frontera en una mezcla de las impedancias del aire al otro lado de la pared y la impedancia de la misma pared:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 Tan(\beta x)}{\eta_1 + j\eta_2 Tan(\beta x)}$$

$$\eta_{in} = 200\Omega \frac{120\pi + j200 Tan(9.87 \times 0.12)}{200 + j120\pi Tan(9.87 \times 0.12)}$$

Donde x=0.12 se obtiene del espesor de la pared que es 12cm=0.12m.

Calculando: $\eta_{in} = (118 - j56)\Omega$

Con esta impedancia de entrada vista desde la primera interfaz, se puede calcular el primer coeficiente de reflexión:

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_{in} - \eta_{aire}}{\eta_{in} + \eta_{aire}} = -0.5 - j0.17 = 0.53\langle -161^0 \rangle$$

Así como el primer coeficiente de transmisión:

$$\tau_1 = 1 + \Gamma_1 = 0.5 - \mathrm{j}0.17$$

La relación de onda estacionaria:

$$SWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.53}{1 - 0.53} = \frac{1.53}{0.47} = 3.27$$

La magnitud del máximo de campo eléctrico:

$$E_{y1}^{+}\big|_{MAX} = (1 + |\Gamma|)E_{y1}^{+} = 1.53 \times 150 = 229V_{RMS}$$

Porcentaje de potencia transmitido a la pared:

$$T_1 = 1 - |\Gamma_1|^2 = 1 - 0.53^2 = 0.72$$

Esto indica que de la potencia emitida por el emisor, solo el 72% se transmite a la pared, pero no que ésta sea la potencia recibida por el receptor.

La reflectancia sobre la primera cara de la pared es:

$$R_1 = 1 - T_1 = 0.28$$

Es decir que el 28% de la potencia se regresa al emisor.

Para obtener la potencia recibida por el receptor se debe tomar en cuenta una segunda reflexión que ocurre en la cara de la pared que da hacia el receptor.

El coeficiente de reflexión en la segunda cara de la pared se calcula como:

$$\Gamma_2 = \frac{\eta_{\mathrm{aire}} - \eta_{\mathrm{pared}}}{\eta_{\mathrm{aire}} + \eta_{\mathrm{pared}}} = 0.31$$

Lo cual da como resultado una transmitancia equivalente a:

$$\mathrm{T}_2 = 1 - |\Gamma_2|^2 = 1 - 0.31^2 = 0.90$$

La potencia transmitida del generador al receptor se obtiene como producto de las dos transmitancias:

$$T_t = 0.9 \times 0.72 = 0.65$$

Es decir que de la potencia emitida por el emisor, solo el 65% llega al receptor, el 28% de la potencia se regresa, por lo tanto, falta un 13% de la potencia que se queda en la pared.

Este porcentaje de potencia la pared absorbe de la onda que la atraviesa. La potencia absorbida se manifiesta en efecto Joule, es decir, calentamiento de la pared.

Este es el principio de operación de los hornos de microondas, en donde ondas de diferentes direcciones atraviesan los alimentos, y un porcentaje importante de la potencia es absorbida por ellos generando calor y cocción.

Impedancia de entrada normalizada

La impedancia de entrada se puede graficar en función de la distancia eléctrica a la frontera usando un sistema de tabulación para magnitud y ángulo.

En el caso de una pared infinita, sobre la que incide una onda electromagnética proveniente del vacío o del aire, se puede obtener un gráfico como el que se muestra en la figura 111.

En este caso se usó una pared de impedancia intrínseca igual a 250Ω.

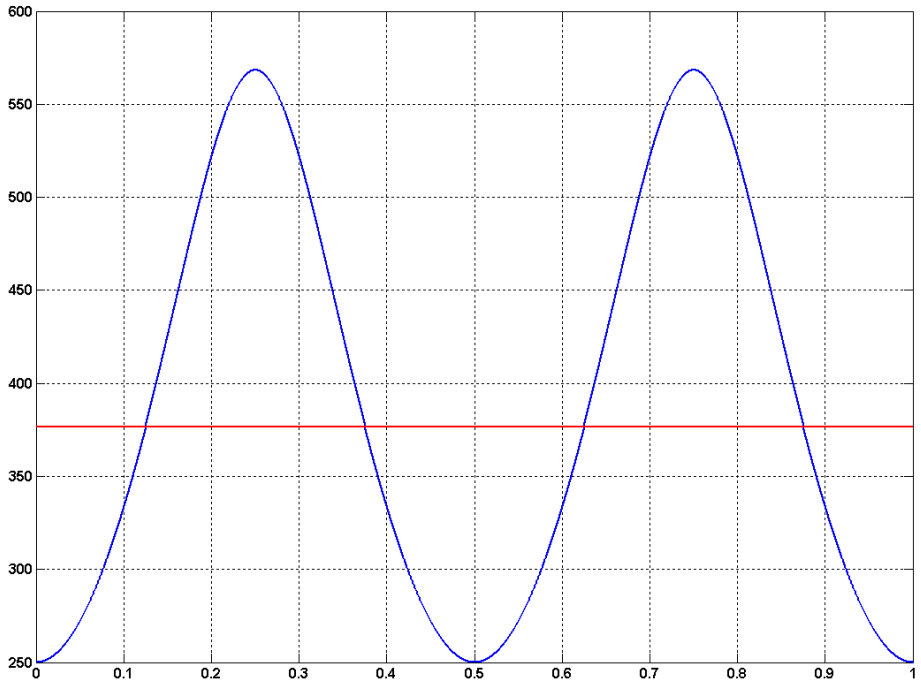


Figura 111. Magnitud de la impedancia de entrada en función de la distancia eléctrica para una onda EM que incide sobre una pared de 250Ω proveniente del aire

Como se observa claramente, la magnitud de la impedancia se repite cada 0.5 longitudes de onda y su valor empieza siendo igual al de la pared, pero llega a un valor máximo que es, incluso, superior a la impedancia del medio en donde se originó la onda, la cual se encuentra marcada en rojo.

En la figura 112, se muestra el ángulo de la impedancia equivalente, para el mismo caso considerado anteriormente, como se observa claramente; a pesar de que ambas impedancias tienen ángulo cero, la impedancia de entrada tiene un ángulo de fase diferente de cero, dependiendo de la distancia a la cual se ubique el observador. Esto indica que el campo eléctrico total y el campo magnético total no siempre están en fase, cuando se presenta reflexión parcial.

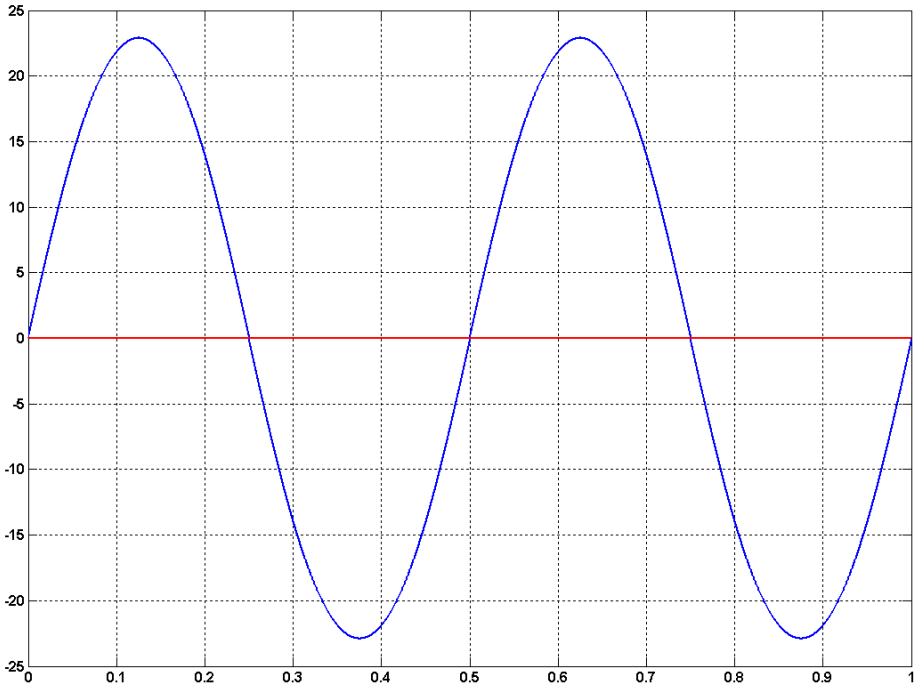


Figura 112. Ángulo de la impedancia de entrada en función de la distancia eléctrica para una onda EM que incide sobre una pared de 250Ω proveniente del aire

Debido a la gran variabilidad que generan las posibles combinaciones de impedancias e interfaces, se usa muy comúnmente la llamada impedancia normalizada, que no es más que la impedancia referida al medio donde se origina la onda.

La impedancia de entrada normalizada se calcula como la relación:

$$\widehat{\eta_{in}} = \frac{\eta_{in}}{\eta_0}$$

Donde el símbolo ^ representa valor normalizado y la impedancia η_0 se denomina de normalización.

Cuando se normaliza con la impedancia η_1 se obtiene la ecuación:

$$\hat{\eta}_{in} = \frac{\eta_1}{\eta_1} \frac{\frac{\eta_2}{\eta_1} + j\frac{\eta_1}{\eta_1} Tan(2\pi\ \ell)}{\frac{\eta_1}{\eta_1} + j\frac{\eta_2}{\eta_1} Tan(2\pi\ \ell)}$$

La cual es equivalente a:

$$\hat{\eta}_{in} = \frac{\hat{\eta}_2 + jTan(2\pi\ \ell)}{1 + j\hat{\eta}_2 Tan(2\pi\ \ell)}$$

Que constituye la impedancia normalizada sobre la impedancia del medio donde se origina la onda.

La impedancia normalizada por definición es adimensional, y para obtener la impedancia real en Ohmios se debe multiplicar por la impedancia de normalización.

Incidencia oblicua

La incidencia oblicua ocurre cuando la dirección de incidencia de la onda electromagnética no coincide con la del vector normal a la frontera entre dos medios.

En esta condición, el campo magnético y el campo eléctrico ya no son simultáneamente paralelos a la interfaz por lo que cambian las condiciones de frontera y las reglas que definen la reflexión y refracción.[28]

En los casos de incidencia oblicua, se tienen tres frentes de onda representados por tres rayos denominados:

- **Rayo incidente:** el que incide sobre la interfaz proveniente de la fuente de las ondas EM.
- **Rayo reflejado:** se refleja llevando la potencia reflejada en la interfaz.
- **Rayo refractado:** el que pasa al otro lado de la interfaz llevando la potencia transmitida.

Estos tres rayos se encuentran siempre en el mismo plano, denominado de incidencia, según se muestra en la figura 113.

[28] Por refracción entiéndase transmisión. Se usan indiferentemente los dos términos.

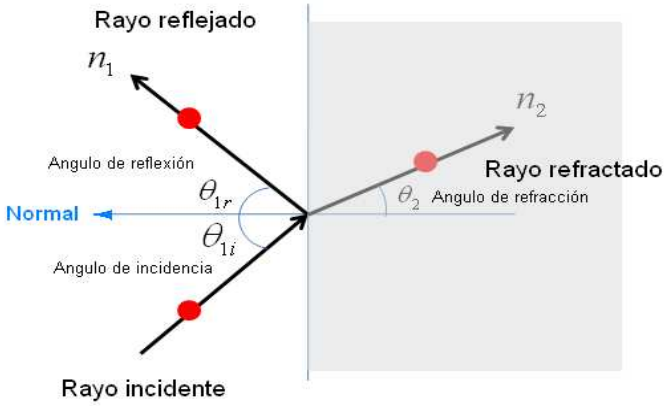


Figura 113. Incidencia oblicua

Estos tres rayos dan lugar a tres ángulos que se forman con la normal a la interfaz entre los medios denominados de la siguiente forma:

- **Ángulo de incidencia:** el que se forma entre el rayo incidente y la normal.
- **Ángulo de reflexión:** se forma entre el rayo reflejado y la normal.
- **Ángulo de refracción:** formado entre el rayo refractado y la normal.

Ley de Snell

Estos ángulos coinciden con los formados por el vector de Poynting con el vector normal a cada lado de la frontera, y la relación entre ellos se encuentra determinada por la llamada "Ley de Snell".

$$n_1 Sen(\theta_1) = n_2\, Sen(\theta_2)$$

En donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios 1 y 2, respectivamente.

El ángulo de incidencia es siempre igual al de reflexión.

También se puede obtener un equivalente a través de las velocidades de propagación:

$$\frac{Sen\,\theta_1}{c_1} = \frac{Sen\,\theta_2}{c_2}$$

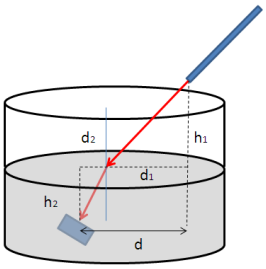
Para medios no magnéticos, la Ley de Snell se puede expresar en función de la impedancia intrínseca de los medios como:

$$\frac{Sen\,\theta_1}{\eta_1} = \frac{Sen\,\theta_2}{\eta_2}$$

Ejemplo 83. Ley de Snell.

Un laser dispara un rayo de luz desde el aire, a una distancia de 30cm. por encima de un tanque de agua con un ángulo de incidencia de 45º. Si se ubica un blanco 20cm. debajo del agua para recibir el impacto del laser. ¿A qué distancia horizontal del puntero del laser debe estar ubicado?

El índice de refracción del agua es de n=1.5



Solución:

Para conocer la distancia horizontal se puede partir de la distancia vertical y los ángulos de incidencia y refracción.

Usando Trigonometría Básica, se puede aproximar la distancia horizontal como la suma de la distancia recorrida en el aire y la recorrida en el agua:

$$d = d_1 + d_2$$

Donde: $d_2 = h_2 Tan\theta_r$ $d_1 = h_1 Tan\theta_i$

Como se conoce el ángulo de incidencia, se puede obtener el ángulo de refracción:

$$Sen\theta_r = \frac{n_1}{n_2} Sen\theta_i$$

El índice de refracción del aire es 1, por lo tanto:

$$Sen\theta_r = \frac{1}{1.5} Sen(45^0) = \frac{0.707}{1.5} = 0.471$$

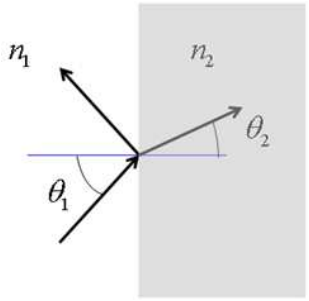
El ángulo de refracción es: $\theta_r = Sen^{-1}(0.471) = 28^0$

Reemplazando: $d = h_2 Tan\theta_r + h_1 Tan\theta_i$

Evaluando: $d = 20cm \times Tan(28^0) + 30cm \times Tan(45^0) = 40.6cm$

Reflexión total

A partir de la Ley de Snell se deduce la aparición de un fenómeno interesante, que ocurre cuando el índice de refracción de la sustancia en la cual se origina la onda (n_1) es mayor al de la sustancia hacia la cual trata de pasar (n_2).



El ángulo formado por el rayo refractado con la normal a la interfaz está definido por la Ley de Snell:

$$Sen(\theta_2)=\frac{n_1}{n_2}Sen(\theta_1)$$

En donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios 1 y 2, respectivamente.

Como la relación $\frac{n_1}{n_2}$ es un número mayor que 1. Esto significa que el producto puede ser igual a 1 para ángulos θ_1 menores a $\frac{\pi}{2}$.

Cuando esto ocurre, el ángulo de refracción se hace igual a $\frac{\pi}{2}$ y ya no existe rayo refractado, es decir, toda la energía del rayo incidente retorna al medio de donde proviene.

A esta condición se le denomina reflexión total interna y se puede presentar en óptica, pero también con todo tipo de ondas electromagnéticas.

Para encontrar el ángulo de incidencia crítico a partir del cual se presenta reflexión total, se parte de la Ley de Snell haciendo el seno del ángulo de refracción igual a la unidad:

$$Sen(\theta_2)=1$$

En esta condición:

$$Sen(\theta_C)=\frac{n_2}{n_1}$$

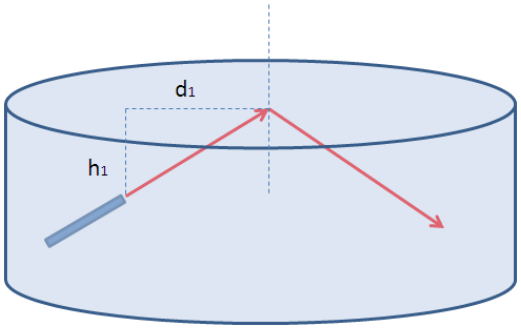
El ángulo crítico también se puede obtener en términos de las impedancias intrínsecas para medios no magnéticos.

$$Sen(\theta_C)=\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

Ejemplo 84. Reflexión total interna.

Un laser dispara un rayo de luz hacia arriba, desde un tanque de agua. Si el laser está ubicado en un blanco 20cm. debajo del agua. ¿A qué distancia horizontal mínima del puntero del laser se debe disparar para que el rayo no abandone el agua?

El índice de refracción del agua es de n=1.5



Solución:

Se calcula el ángulo crítico para el agua, en este caso:

$$Sen(\theta_C) = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1.5} = 0.666$$

Con lo que se obtiene un ángulo crítico de:

$$\theta_C = Sen^{-1}(0.666) = 41.8^0$$

Con este ángulo se obtiene una relación trigonométrica entre la profundidad y la distancia:

$$\frac{d_1}{h_1} = \mathrm{Tan}\theta_1$$

Despejando:

$$d_1 = h_1 \mathrm{Tan}\theta_1 = 20cm \times Tan(41.8^0) = 17.9cm$$

Modos de polarización TE, TM y TEM

Cuando una onda incide de forma oblicua, ya no es posible asegurar que el campo eléctrico y el campo magnético sean paralelos a la interfaz que separa los medios. Como se muestra en la figura 114.

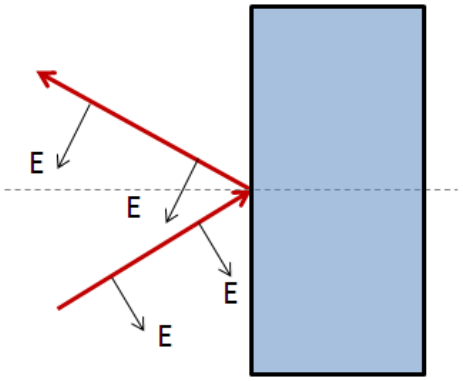


Figura 114. Campo eléctrico de una onda que incide en forma oblicua

Esta característica hace imposible usar las condiciones de frontera en la misma forma en que se usaron para resolver el problema de incidencia perpendicular.

El modelo se complica un poco cuando se considera que la onda puede tener un tipo de polarización que haga que el campo eléctrico no se encuentre contenido en el plano de incidencia, como se muestra en la figura 114, sino que se encuentre en algún ángulo intermedio entre cero y $\frac{\pi}{2}$ con dicho plano. Ambos ángulos, el de incidencia y el del campo eléctrico, con la normal al plano de incidencia, deben ser considerados al momento de determinar las leyes que definen la reflexión parcial de la onda.

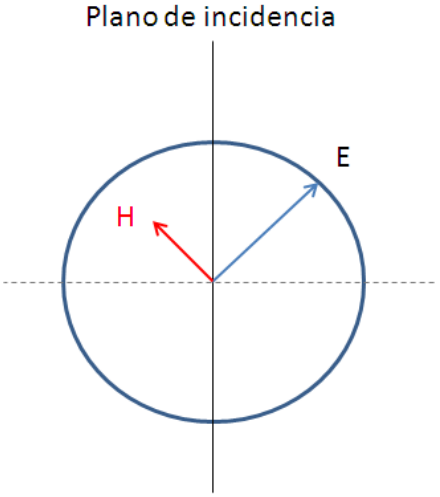


Figura 115. Campo eléctrico y campo magnético de una onda incidente que incide en forma oblicua sobre una interfaz entre dos medios

En la figura 115, se muestran los vectores de campo eléctrico y magnético de una onda que incide en forma oblicua sobre una interfaz que separa dos medios. El plano de incidencia se representa por una línea recta que, proyectada al salir de la página, forma el plano.

Independientemente del ángulo de incidencia, siempre es posible descomponer la onda incidente en dos ondas, una de las cuales tiene su campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia y otra paralela al mismo. Como se muestra en la figura 116.

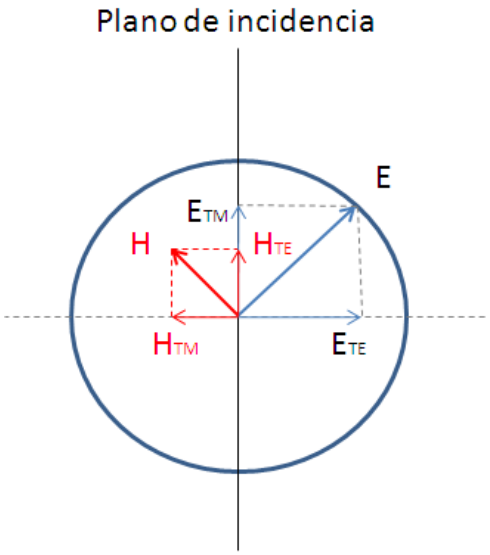


Figura 116. Descomposición de una onda con incidencia oblicua en los modos TE y TM

La onda cuyo campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia se denomina componente TE o "Transversal Electric", esta componente tiene su campo magnético paralelo al plano de incidencia, ya que ambos campos deben ser perpendiculares.

La onda cuyo campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia se denomina componente TM o "Transversal Magnetic", debido a que como el campo E es paralelo al plano de incidencia, el campo magnético es perpendicular o transversal al mismo.

La suma de ambas ondas da origen a la onda original.

Los modos TE y TM se denominan modos de polarización de la onda EM, cuando una onda posee simultáneamente componente TE y TM se dice que tiene polarización TEM, como en el caso de la onda mostrada en la figura 116.

Estos modos de polarización se conocen también como:

TE = Polarización **s**: La s es abreviatura de la palabra alemana "senkrecht-perpendicular".

TM = Polarización **p**: La p es abreviatura de la palabra alemana "parallel-paralelo".

En ambos casos se refiere a la posición del campo **E** con respecto al plano de incidencia.

Coeficientes de Fresnel en polarización TE

En la figura 117 se muestra una onda EM que incide en modo TE sobre una interfaz entre dos medios.

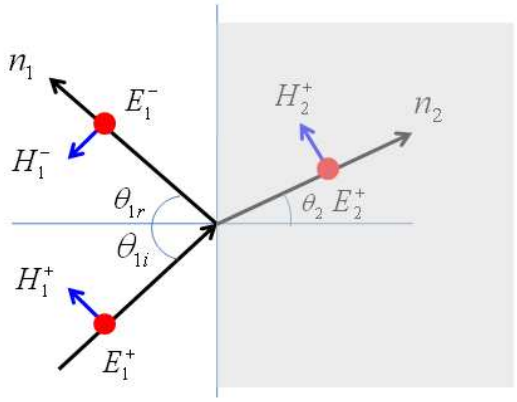


Figura 117. Incidencia oblicua polarización TE

Como se puede apreciar claramente, el campo eléctrico es paralelo a la interfaz, por ser perpendicular al plano de incidencia, pero el campo magnético no.

El campo magnético incidente tiene una componente paralela a la interfaz y una componente perpendicular a la misma. Cada una de ellas se refleja de forma diferente, por lo que los coeficientes de reflexión y transmisión deben tomar en cuenta, no solo la relación de impedancias, sino también el ángulo de incidencia.

El coeficiente de reflexión en modo TE viene dado por:

$$r_{12\_TE} = \frac{\eta_2 Cos\theta_1 - \eta_1 Cos\theta_2}{\eta_2 Cos\theta_1 + \eta_1 Cos\theta_2}$$

Mientras el coeficiente de transmisión queda:

$$t_{12\_TE} = \frac{2\eta_2 Cos\theta_1}{\eta_2 Cos\theta_1 + \eta_1 Cos\theta_2}$$

Obsérvese que cuando el ángulo de incidencia se hace igual a cero grados, los coeficientes de Fresnel son iguales a los que se tomaron para incidencia perpendicular.

$$r_{12\_TE}\left(0^0\right) = \frac{\eta_2 Cos(0) - \eta_1 Cos(0)}{\eta_2 Cos(0) + \eta_1 Cos(0)} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \Gamma$$

$$t_{12\_TE}\left(0^0\right) = \frac{2\eta_2 Cos(0)}{\eta_2 Cos(0) + \eta_1 Cos(0)} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \tau$$

Los coeficientes de Fresnel también se pueden expresar a través de los índices de refracción como:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 Cos\theta_1 - n_2 Cos\theta_2}{n_1 Cos\theta_1 + n_2 Cos\theta_2} \qquad t_{12\_TE} = \frac{2n_1 Cos\theta_1}{n_1 Cos\theta_1 + n_2 Cos\theta_2}$$

Cuando se usa la Ley de Snell se pueden expresar los mismos coeficientes en términos de los parámetros geométricos.

$$r_{12\_TE} = \frac{Sen(\theta_2 - \theta_1)}{Sen(\theta_2 + \theta_1)} \qquad t_{12\_TE} = \frac{2Cos\theta_1 Sen\theta_2}{Sen(\theta_1 + \theta_2)}$$

Esta última notación establece una fuerte dependencia entre los coeficientes de Fresnel y el ángulo de incidencia, la cual queda demostrada cuando se hace un gráfico de los mismos con respecto al ángulo de incidencia.

En la figura 118, se muestra el coeficiente de reflexión en modo TE para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º para dos medios. La onda pasa de un medio de menor índice de refracción a uno de mayor índice de refracción, por lo que no hay reflexión total.

Como se observa siempre que el índice de refracción del segundo medio sea mayor, el coeficiente de reflexión tiene signo negativo.

En un ángulo de 90º el coeficiente de reflexión se hace 1, porque es cuando la onda pasa tangencial a la frontera y por lo tanto no existe campo transmitido.

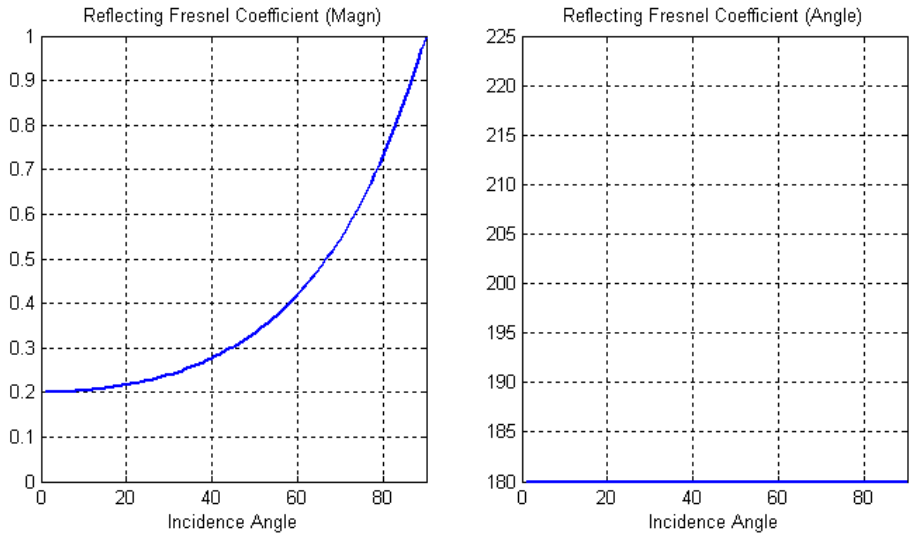


Figura 118. Gráfico del coeficiente de Fresnel de reflexión en magnitud y ángulo para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º. Para el gráfico se usaron dos medios n_1=1, n_2=1.5.

Para el coeficiente de transmisión se tiene un comportamiento similar pero invertido, como se muestra en la figura 119. El coeficiente de transmisión se reduce paulatinamente hasta llegar a cero para un ángulo de incidencia de 90º.

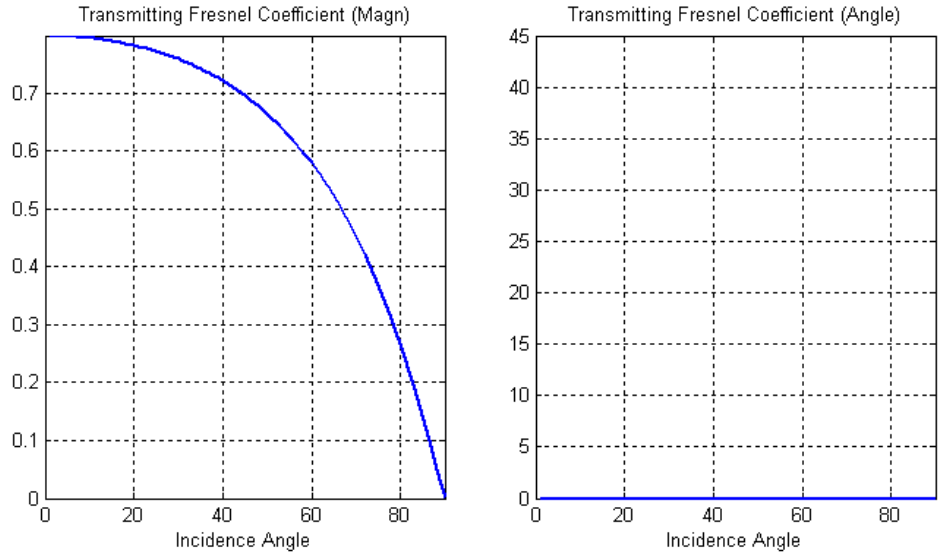


Figura 119. Gráfico del coeficiente de Fresnel de transmisión en magnitud y ángulo para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º. Para el gráfico se usaron dos medios n_1=1, n_2=1.5

Ejemplo 85. Incidencia oblicua en polarización TE.

Encuentre el coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión y el ángulo de refracción para una onda con polarización **s** que incide desde el aire sobre un medio $\epsilon_r = 5$ con un ángulo de 30º.

Encuentre el ángulo de reflexión total interna cuando la onda trata de salir del dieléctrico hacia el aire.

Solución:

Polarización s=TE

En medios no magnéticos: $n_2 = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{5} = 2.23$

Por Ley de Snell:

$$n_1 Sen\theta_1 = n_2 Sen\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = Sen^{-1}\left(\frac{Sen(30^0)}{2.23}\right) = 13^0$$

El coeficiente de transmisión TE:

$$t_{12\_TE} = \frac{2n_1 Cos\theta_1}{n_1 Cos\theta_1 + n_2 Cos\theta_2} = \frac{2Cos(30^0)}{Cos(30^0) + 2.23 \times Cos(13^0)} = 0.57$$

El coeficiente de reflexión TE:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 Cos\theta_1 - n_2 Cos\theta_2}{n_1 Cos\theta_1 + n_2 Cos\theta_2} = \frac{Cos(30^0) - 2.23 \times Cos(13^0)}{Cos(30^0) + 2.23 \times Cos(13^0)} = \frac{-1.307}{3.029} = -0.43$$

Ángulo de reflexión total interna:

$$Sen(\theta_C) = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2.23} \qquad \theta_C = Sen^{-1}\left(\frac{1}{2.23}\right) = 26.6^0$$

Coeficientes de Fresnel en polarización TM

En la figura 120, se muestra una onda EM que incide en modo TM sobre una interfaz entre dos medios.

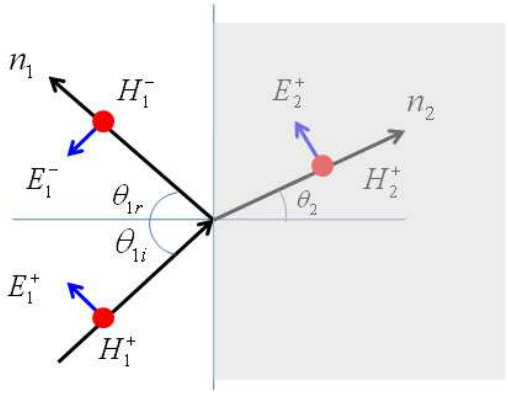


Figura 120. Incidencia oblicua polarización TM

De forma similar a la polarización TE, en la polarización TM el campo magnético es paralelo a la interfaz, por ser perpendicular al plano de incidencia, pero el campo eléctrico no.

El campo eléctrico incidente tiene una componente paralela a la interfaz y una componente perpendicular a la misma. Los coeficientes de reflexión y transmisión también deben tomar en cuenta, la relación de impedancias y el ángulo de incidencia.

El coeficiente de reflexión en modo TM viene dado por:

$$r_{12\_TM} = \frac{\eta_1 Cos\theta_1 - \eta_2 Cos\theta_2}{\eta_1 Cos\theta_1 + \eta_2 Cos\theta_2}$$

Mientras el coeficiente de transmisión queda:

$$t_{12\_TM} = \frac{2\eta_2 Cos\theta_1}{\eta_1 Cos\theta_1 + \eta_2 Cos\theta_2}$$

Estos coeficientes se pueden expresar a través de los índices de refracción como:

$$r_{12\_TM} = \frac{n_2 Cos\theta_1 - n_1 Cos\theta_2}{n_2 Cos\theta_1 + n_1 Cos\theta_2} \qquad t_{12\_TM} = \frac{2n_1 Cos\theta_1}{n_2 Cos\theta_1 + n_1 Cos\theta_2}$$

Cuando se usa la Ley de Snell se pueden expresar los mismos coeficientes en términos de los parámetros geométricos.

$$r_{12\_TM} = \frac{Tan(\theta_1 - \theta_2)}{Tan(\theta_1 + \theta_2)} \qquad t_{12\_TM} = \frac{2Cos\theta_1 Sen\theta_2}{Sen(\theta_1 + \theta_2)Cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Al igual que en el modo TE, los coeficientes de Fresnel tienen una fuerte dependencia del ángulo de incidencia.

En la figura 121, se muestra el coeficiente de reflexión en modo TM para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º para dos medios. La onda pasa de un medio de menor índice de refracción a uno de mayor índice de refracción, por lo que no hay reflexión total.

En un ángulo de 90º el coeficiente de reflexión se hace 1, porque es cuando la onda pasa tangencial a la frontera y por lo tanto no existe campo transmitido.

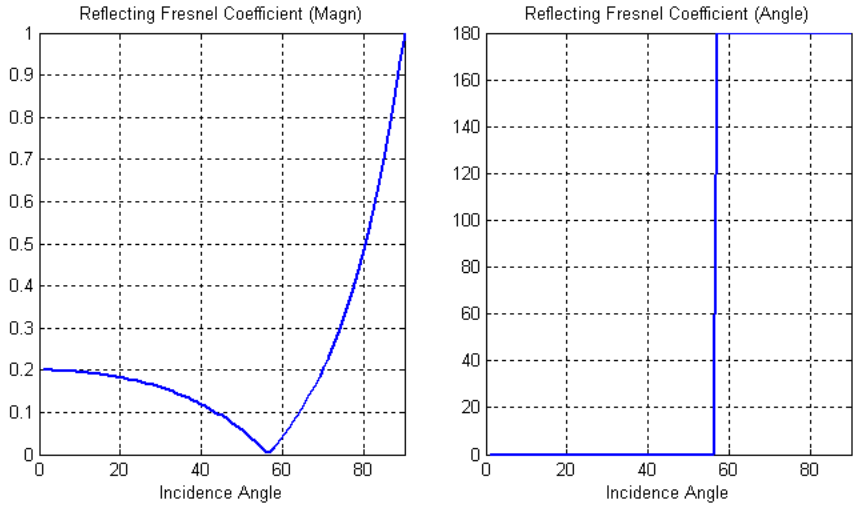


Figura 121. Gráfico del coeficiente de Fresnel de reflexión en magnitud y ángulo para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º. Para el gráfico se usaron dos medios n_1=1, n_2=1.5

Para el coeficiente de transmisión es prácticamente igual que el coeficiente de transmisión TE.

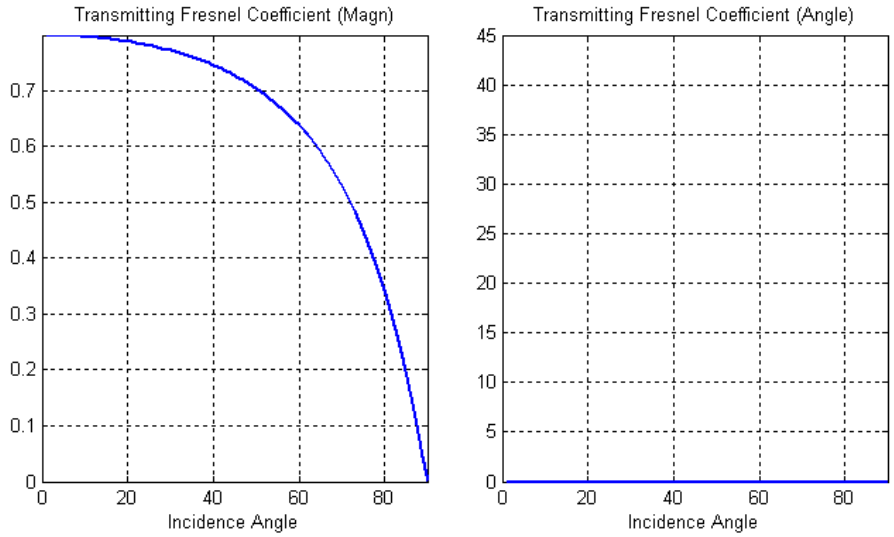


Figura 122. Gráfico del coeficiente de Fresnel de transmisión en magnitud y ángulo para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º. Para el gráfico se usaron dos medios n_1=1, n_2=1.5

Ejemplo 86. Incidencia oblicua en polarización TM.

Encuentre el coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión y el ángulo de refracción para una onda con polarización **p** que incide desde el aire sobre un medio $\epsilon_r = 5$ con un ángulo de 30º.

Solución:

Polarización s=TM

En medios no magnéticos: $n_2 = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{5} = 2.23$

Por Ley de Snell:

$$n_1 Sen\theta_1 = n_2 Sen\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = Sen^{-1}\left(\frac{Sen(30^0)}{2.23}\right) = 13^0$$

El coeficiente de transmisión TM:

$$t_{12\_TM} = \frac{2n_1 Cos\theta_1}{n_2 Cos\theta_1 + n_1 Cos\theta_2}$$

$$t_{12\_TM} = \frac{2 \times Cos(30^0)}{2.23 \times Cos(30^0) + Cos(13^0)} = 0.596$$

El coeficiente de reflexión TM:

$$r_{12\_TM} = \frac{n_2 Cos\theta_1 - n_1 Cos\theta_2}{n_2 Cos\theta_1 + n_1 Cos\theta_2}$$

$$r_{12\_TM} = \frac{2.23 \times Cos(30^0) - Cos(13^0)}{2.23 \times Cos(30^0) + Cos(13^0)} = 0.33$$

Se pueden calcular en función de los parámetros geométricos:

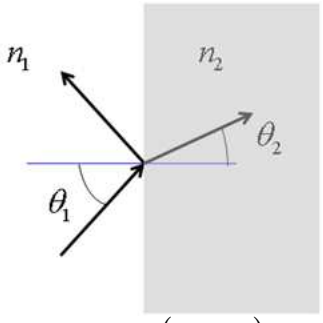
$$r_{12\_TM} = \frac{Tan(\theta_1 - \theta_2)}{Tan(\theta_1 + \theta_2)} \qquad t_{12\_TM} = \frac{2Cos\theta_1 Sen\theta_2}{Sen(\theta_1 + \theta_2)Cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$r_{12\_TM} = \frac{Tan(30^0 - 13^0)}{Tan(30^0 + 13^0)} = \frac{Tan(17^0)}{Tan(43^0)} = 0.33$$

$$t_{12\_TM} = \frac{2Cos(30^0)Sen(13^0)}{Sen(43^0)Cos(17^0)} = 0.596$$

Ángulo de refracción total – polarización TM

Al analizar la expresión para el coeficiente de reflexión TM se encuentra una condición especial denominada refracción total.



$$r_{12\_TM} = \frac{Tan(\theta_1 - \theta_2)}{Tan(\theta_1 + \theta_2)} = 0$$

Cuando la suma de los ángulos de incidencia y de refracción es 90º se anula el coeficiente de Fresnel de reflexión en el modo TM (la tangente tiende a infinito), lo que significa que el campo eléctrico paralelo no se refleja, sino que se refracta completamente.

En una onda incidente con polarización TM, esto significa que no habría onda reflejada, pero en una onda con polarización TEM, la onda reflejada tendría solo polarización TE.

Esta forma se denomina polarización por reflexión y, a diferencia de otros modos de polarizar ondas electromagnéticas, ocurre solo para un ángulo de incidencia particular.

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^0 \quad \Rightarrow \quad r_{12\_TM} = 0$$

A diferencia de la reflexión total, la refracción total no ocurre a partir de un ángulo específico, sino en un ángulo específico, si el ángulo de incidencia varia ligeramente ya no se presenta el fenómeno.

El ángulo en el cual se presenta esta condición se llama ángulo de Brewster.

El ángulo de Brewster se puede obtener usando la expresión del coeficiente de reflexión TM en función de los índices de refracción:

$$r_{12\_TM} = \frac{n_2 Cos\theta_B - n_1 Cos\theta_2}{n_2 Cos\theta_B + n_1 Cos\theta_2} = 0$$

Para que esto se cumpla se requiere que:

$$n_2 Cos\theta_B = n_1 Cos\theta_2$$

Dado que:

$$\theta_B + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

En ángulos complementarios, el coseno de un ángulo es el seno del otro, por lo tanto:

$$Cos\theta_2 = Sen\theta_B$$

Reemplazando:

$$n_2 Cos\theta_B = n_1 Sen\theta_B$$

De donde surge:

$$Tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

En función de las impedancias intrínsecas de los medios

$$Tan\theta_B = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

A diferencia del ángulo critico de reflexión total, el ángulo de Brewster se presenta para cualquier combinación de los índices de refracción n_1 y n_2. Si se observa por ejemplo en la figura 121, se ve cómo el coeficiente de reflexión se hace cero justo en el ángulo de Brewster, que en este caso está cerca de los 60º.

Se observa claramente cómo a partir del ángulo de Brewster, el signo del coeficiente de reflexión cambia a positivo.

Para obtener el valor exacto, se toman los índices de refracción usados en el gráfico:

$$n_1 = 1 \quad n_2 = 1.5$$

El ángulo de Brewster para este caso es:

$$\theta_B = Tan^{-1}\left(\frac{1.5}{1}\right) = 56^0$$

Coeficientes de Fresnel complejos

Cuando se sobrepasa el ángulo crítico, la expresión para calcular el ángulo de refracción a través de la Ley de Snell carecer de sentido, ya el dominio de la función seno inverso está limitado al intervalo [0, 1].

$$\theta_2 = Sen^{-1}\left[\frac{n_1}{n_2} Sen(\theta_1)\right]$$

Para ángulos de incidencia superiores al ángulo crítico:

$$\frac{n_1}{n_2} Sen(\theta_1) \geq 1$$

En este caso, los coeficientes de Fresnel se tornan complejos, lo cual indica que aparece una diferencia de fase entre los campos incidente, reflejado y transmitido.

Los coeficientes de Fresnel complejos se pueden obtener como:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 Cos\theta_1 - n_2 Cos\theta_2}{n_1 Cos\theta_1 + n_2 Cos\theta_2}$$

Por identidades trigonométricas:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 Cos\theta_1 - n_2\left[1 - Sen^2\theta_2\right]^{1/2}}{n_1 Cos\theta_1 + n_2\left[1 - Sen^2\theta_2\right]^{1/2}}$$

De acuerdo con la Ley de Snell, se elimina el ángulo de refracción:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 Cos\theta_1 - n_2\left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Sen^2\theta_1\right]^{1/2}}{n_1 Cos\theta_1 + n_2\left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Sen^2\theta_1\right]^{1/2}}$$

Se introduce la constante n_2 en la raíz:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 Cos\theta_1 - \left[n_2^2 - n_1^2\ Sen^2\theta_1\right]^{1/2}}{n_1 Cos\theta_1 + \left[n_2^2 - n_1^2\ Sen^2\theta_1\right]^{1/2}}$$

Se hace un cambio de signo dentro de la raíz:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 Cos\theta_1 - j\left[n_1^2\ Sen^2\theta_1 - n_2^2\right]^{1/2}}{n_1 Cos\theta_1 + j\left[n_1^2\ Sen^2\theta_1 - n_2^2\right]^{1/2}}$$

Finalmente, se divide numerador y denominador por el factor común: $n_1 Cos\theta_1$

$$r_{12\_TE} = \frac{1 - \frac{1}{n_1 Cos\theta_1} j\left[n_1^2\ Sen^2\theta_1 - n_2^2\right]^{1/2}}{1 + \frac{1}{n_1 Cos\theta_1} j\left[n_1^2\ Sen^2\theta_1 - n_2^2\right]^{1/2}}$$

El mismo factor se introduce en la raíz:

$$r_{12\_TE} = \frac{1 - j\left[Tan^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^{1/2}}{1 + j\left[Tan^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^{1/2}}$$

De forma semejante se pueden obtener ecuaciones para los demás coeficientes:

$$t_{12\_TE} = \frac{2n_1 Cos\theta_1}{1 + j\left[Tan^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$r_{12\_TM} = \frac{1 - j\frac{n_1}{n_2}\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Tan^2\theta_1 - 1\right]^{1/2}}{1 + j\frac{n_1}{n_2}\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Tan^2\theta_1 - 1\right]^{1/2}} \qquad t_{12\_TM} = \frac{2n_1 Cos\theta_1}{1 + j\frac{n_1}{n_2}\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Tan^2\theta_1 - 1\right]^{1/2}}$$

Reflectancia y transmitancia

Reflectancia

La reflectancia es la cantidad de energía que es reflejada por un objeto luego de que ésta incide sobre él, el resto de la energía incidente puede ser transmitida o absorbida por el objeto.

Matemáticamente, la reflectancia es la relación entre la componente del vector de Poynting reflejado perpendicular a la frontera y la misma componente del vector de Poynting incidente.

$$R = \frac{n \cdot P_1^-}{n \cdot P_1^+}$$

Donde n es un vector unitario perpendicular a la frontera.

En una onda incidente TEM, se calcula la reflectancia separada por cada modo:

$$R_{TE} = r_{12\_TE}^2 \qquad R_{TM} = r_{12\_TM}^2$$

Al igual que en el caso de los coeficientes de Fresnel, la reflectancia tiene una fuerte dependencia del ángulo de incidencia. En la figura 123, se puede ver la reflectancia en dependencia del ángulo de incidencia para dos medios n_1 y n_2. Se aprecia claramente el ángulo de Brewster, en el cual la reflectancia TM se hace cero.

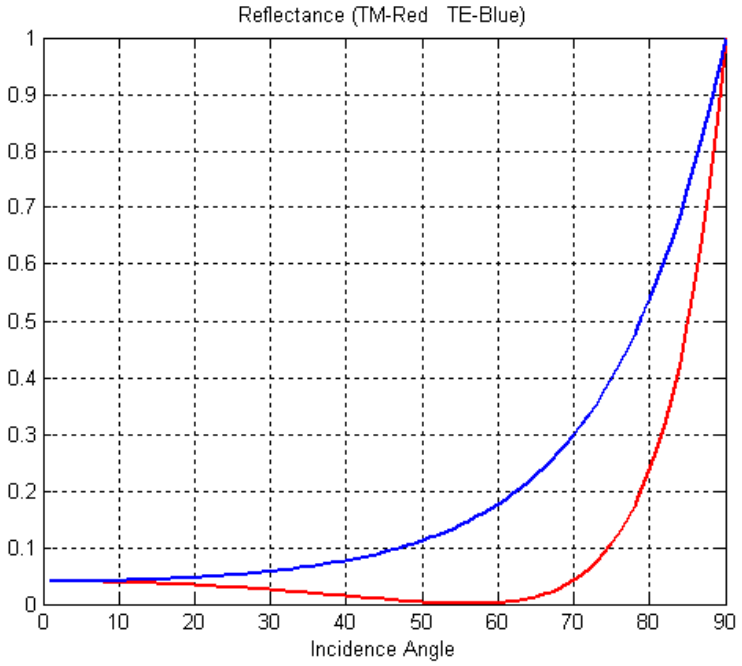


Figura 123. Grafico de la reflectancia en los modos TE y TM para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º. Para el gráfico se usaron dos medios n_1=1, n_2=1.5

Cuando se invierten los índices de refracción, además del ángulo de Brewster, aparece el ángulo de reflexión total, como se aprecia en la figura 124, donde la reflectancia en ambos modos llega al 100%.

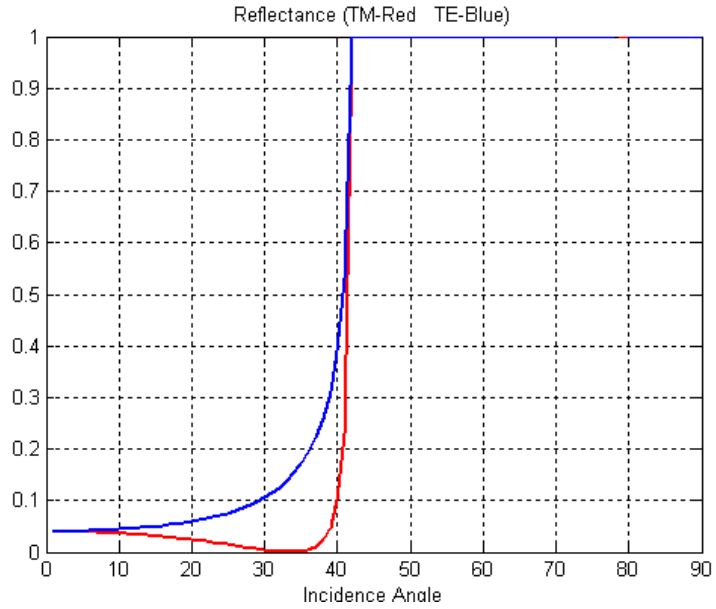


Figura 124. Gráfico de la reflectancia en los modos TE y TM para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º. Para el gráfico se usaron dos medios n_1=1.5, n_2=1. Se aprecia el fenómeno de reflexión total

Transmitancia

Es la cantidad de energía que un objeto deja pasar luego de que esta incide sobre él. El resto de la energía incidente puede ser reflejada o disipada por el objeto.

Matemáticamente, es la relación entre la componente del vector de Poynting transmitido perpendicular a la frontera y la misma componente del vector de Poynting incidente.

$$T = \frac{n \cdot P_2^+}{n \cdot P_1^+}$$

Donde n es un vector unitario perpendicular a la frontera.

En una onda incidente TEM, se calcula la transmitancia separada por cada modo:

$$T_{TE} = \frac{n_2 Cos\theta_2}{n_1 Cos\theta_1} t_{12\_TE}^2 \qquad T_{TM} = \frac{n_2 Cos\theta_2}{n_1 Cos\theta_1} t_{12\_TM}^2$$

La transmitancia también tiene una fuerte dependencia del ángulo de incidencia. En la figura 125, se puede ver la transmitancia en dependencia del ángulo de incidencia para dos medios n_1 y n_2. Se aprecia claramente el ángulo de Brewster, en el cual la reflectancia TM se hace cero y la transmitancia 1.

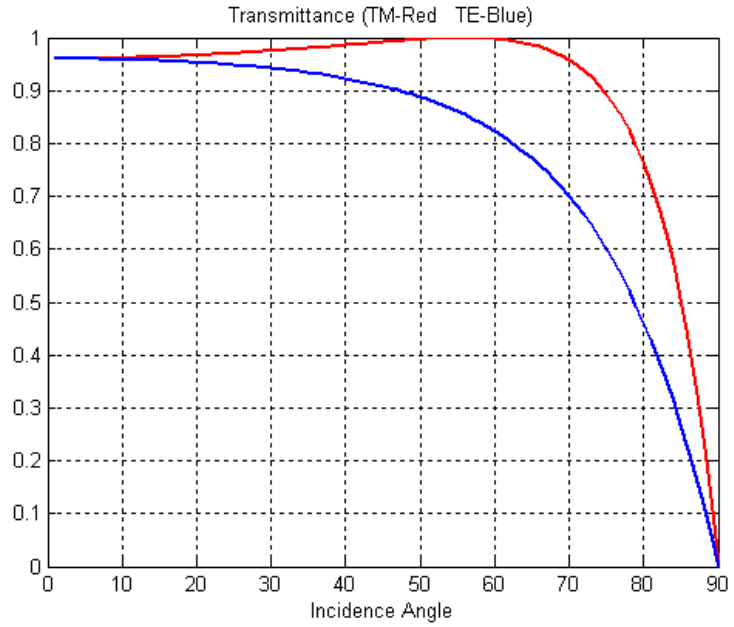


Figura 125. Gráfico de la transmitancia en los modos TE y TM para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º. Para el gráfico se usaron dos medios n_1=1, n_2=1.5. La transmitancia TM en el ángulo de Brewster se hace 1

Cuando se invierten los índices de refracción, además del ángulo de Brewster, aparece el ángulo de reflexión total, como se aprecia en la figura 126, donde la transmitancia en ambos modos llega al 0%.

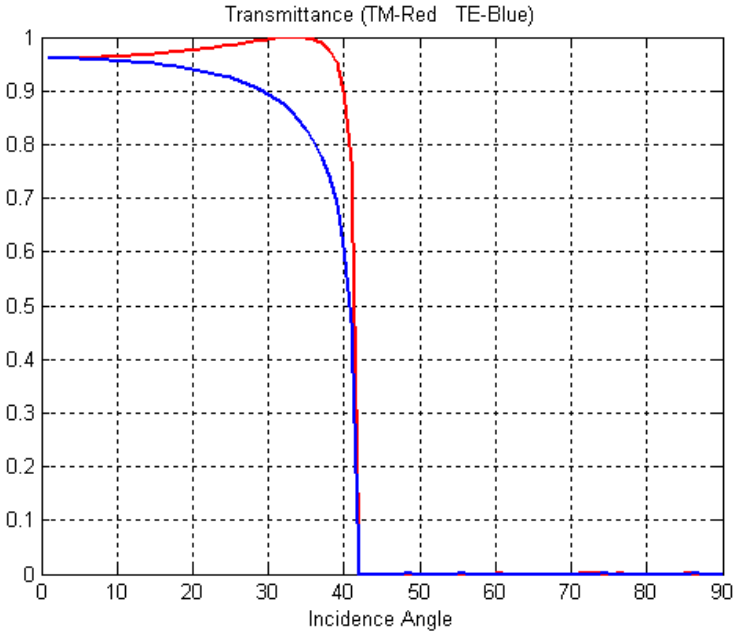


Figura 126. Gráfico de la transmitancia en los modos TE y TM para ángulos de incidencia desde 0º hasta 90º. Para el gráfico se usaron dos medios n_1=1.5, n_2=1. Se aprecia el fenómeno de reflexión total

Por ley de conservación de la energía, la suma de la reflectancia y la transmitancia en cada modo debe ser igual a la unidad.

$$R_{TE} + T_{TE} = 1 \qquad R_{TM} + T_{TM} = 1$$

Ejemplo 87. Potencia incidente y reflejada con incidencia oblicua.

Una onda con polarización circular, incide desde el aire sobre un bloque de plexiglás $\epsilon_r = 3.45$, bajo el ángulo de Brewster.

Calcule el porcentaje de potencia reflejada y transmitida, así como el ángulo de reflexión y refracción.

Solución:

La impedancia intrínseca del plexiglás se calcula como:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} = 203\Omega$$

Se calcula el ángulo de Brewster:

$$\theta_B = Tan^{-1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{120\pi}{203}\right) = 61.7^0$$

Coeficientes de Fresnel bajo el ángulo de Brewster:

$$r_{12\_TE} = Cos(2 \times \theta_B) = -0.55 \qquad t_{12\_TE} = 2Cos^2\theta_B = 0.449$$

$$r_{12\_TM} = 0 \qquad t_{12\_TM} = Cot\theta_B = 0.538$$

La reflectancia y transmitancia

$$R_{TM} = 0 \qquad R_{TE} = 30\% \qquad T_{TM} = 1 \qquad T_{TE} = 70\%$$

El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia:

$$\theta_{refl} = 61.7^0$$

El ángulo de refracción se calcula por Ley de Snell:

$$\frac{Sen\theta_1}{\eta_1} = \frac{Sen\theta_2}{\eta_2}$$

Por lo tanto:

$$\theta_2 = Sen^{-1}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1} Sen\theta_1\right) = 27.8^0$$

Ejercicios del capítulo

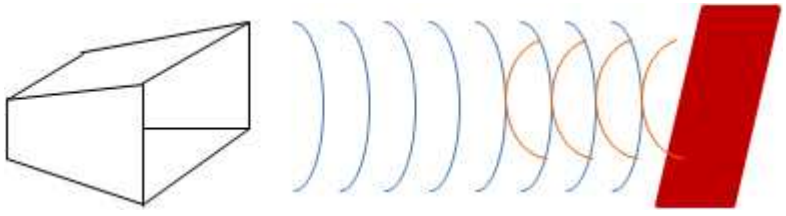
1. Una onda electromagnética incide desde el aire en forma perpendicular sobre una pantalla y se refleja de tal forma que se tiene una ROE de 4 y que el primer máximo de campo eléctrico se encuentra a 0.35λ de la pantalla. ¿Cuál es la impedancia de la pantalla?

2. Una onda plana monocromática de 50MHz, incide desde el aire sobre un cristal diamagnético no disipativo con $\varepsilon_r = 2.5$. La potencia original se la señal es de 100mW/m^2. Calcule: la potencia transmitida y la reflejada, la relación de onda estacionaria y la ubicación (en metros desde la frontera) del primer mínimo y el primer máximo de campo eléctrico.

3. Una onda plana monocromática de 20MHz incide desde el aire sobre un cristal diamagnético no disipativo. La ROE medida es de 1.5 y el primer mínimo de campo eléctrico se encuentra justo en la frontera. Calcule: la reflectancia y la transmitancia, la impedancia intrínseca del cristal y su permitividad relativa.

4. Una onda electromagnética plana de 10GHz y 250mW/m^2 incide en forma perpendicular desde el aire sobre una placa de cobre de 10um de espesor y 25cm^2 de sección. Calcule:

    - La magnitud del campo eléctrico y del campo magnético tanto incidente como reflejado.
    - La impedancia intrínseca de la placa de cobre y la profundidad de penetración de la onda.
    - La potencia transmitida a la placa.
    - La potencia por unidad de área reflejada desde la placa.
    - La ROE en el aire y la distancia desde la placa en la que se encuentra el primer máximo de campo eléctrico.
    - Calcule a qué distancia mínima se debe ubicar la fuente de ondas electromagnéticas para que la impedancia vista desde la fuente sea la máxima posible.



5. Una corriente alterna senoidal que circula por un alambre, genera un campo magnético dado por: $H = 30e^{j2\pi\times10^9 t}e^{j\beta x}\left[a_y + 3ja_z\right] mA/m$ en el aire. La onda incide en forma perpendicular sobre el vidrio de una ventana $(\epsilon_r = 6)$, situado a 45 centímetros de la fuente. Ninguno de los dos medios es disipativo.

    Caso 1. Que el grosor de la ventana sea infinito
    - ¿Cuál es el valor del coeficiente de reflexión (magnitud y ángulo)?

- ¿Cuál es la impedancia de entrada vista desde la fuente y cuál la magnitud del campo eléctrico incidente y reflejado?
- ¿Cuál es el valor de la ROE al lado de la fuente?
- ¿A qué distancia del vidrio se encuentra el primer máximo de campo eléctrico? ¿Cuál es su magnitud?
- ¿A qué distancia del vidrio se encuentra el primer mínimo de campo eléctrico? ¿Cuál es su magnitud?
- ¿Qué porcentaje de la potencia radiada por la fuente se refleja de vuelta? ¿Qué porcentaje se transmite a través del vidrio?

Caso 2. Repita los mismo cálculos suponiendo que el vidrio tiene un espesor de 6 mm.

6. Una onda electromagnética plana, cuyo campo eléctrico se encuentra en dirección Y, viaja a lo largo del eje X una distancia total de 150m. a través de un dieléctrico no-magnético de bajas pérdidas, con los siguientes parámetros de propagación:

$$\alpha = 0.5\ {}^{Np}/_{km} \qquad \beta = 5\pi\ {}^{rad}/_{m} \qquad f_v = 0.5$$

Choca de frente con una pantalla y se refleja con un coeficiente de reflexión $\Gamma = 0.5 - j0.4$ retornando hasta el punto de partida.

Calcule:

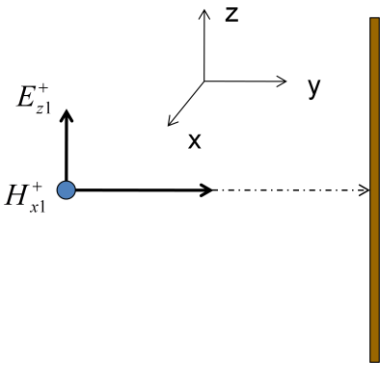
- La velocidad de propagación, la permitividad relativa y la conductividad del medio.
- El porcentaje de la potencia incidente que retorna al punto de partida después del viaje de ida y regreso.
- El porcentaje de la potencia incidente que se disipa por efecto Joule en el medio.
- La potencia que se transmite a la pantalla.
- La impedancia intrínseca de la pantalla y del dieléctrico.

7. En la figura 1 se muestra una onda electromagnética de 100MHz que incide de forma normal desde el aire sobre una placa de cobre de 5mm. de espesor. La intensidad de campo eléctrico incidente es de 103V/m en el punto de incidencia.

$$\sigma_{aire} = 10^{-7}\ {}^{Sm}/_{m} \qquad \sigma_{Cobre} = 6\times10^{7}\ {}^{Sm}/_{m}$$

Calcule:

- La ecuación de la onda incidente y reflejada de campo eléctrico y magnético
- El coeficiente de reflexión y de transmisión.
- La relación de onda estacionaria en el aire.
- La distancia en la cual se encuentra el primer máximo de campo eléctrico.
- El vector de Poynting promedio, incidente, reflejado y transmitido.



8. Calcule el coeficiente de reflexión de una onda polarizada en modo TE que incide desde el aire sobre un dieléctrico con n=1.5 con el ángulo de Brewster. Calcule la permitividad relativa del medio.

9. Se hace incidir un rayo de laser rojo desde el aire, sobre un dieléctrico desconocido, cambiando el ángulo de incidencia hasta lograr que el rayo reflejado tenga solamente polarización s. En ese momento, se mide el ángulo de incidencia y se obtiene una medida de 65º. Calcule el valor de la impedancia intrínseca, el índice de refracción y la permitividad relativa del dieléctrico desconocido.

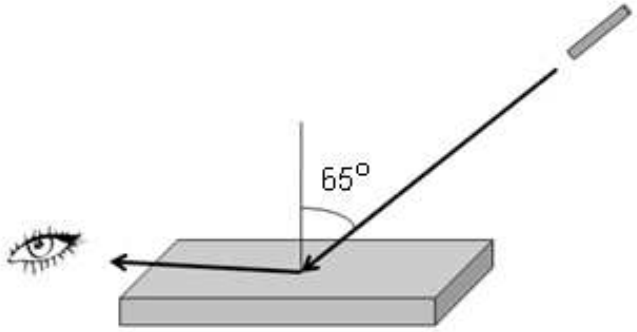


Figura 1

10. Encuentre el coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión, el ángulo de refracción y el ángulo de Brewster para una onda polarizada linealmente en forma perpendicular al plano de incidencia que incide desde el aire sobre un medio ε_r=5 con un ángulo de 30º. Repita los cálculos intercambiando los medios y encuentre el ángulo de reflexión total interna cuando la onda trata de salir del dieléctrico hacia el aire.

11. Un foco de luz incandescente se encuentra situado a una altura h, sobre un lago en calma, como se muestra en la figura 2. El índice de refracción del agua dulce es n=1.333. Calcule la altura a la que se debe situar el foco para que la luz del mismo reflejada por el lago sea observada por una persona de 1.80mts. de estatura, a una distancia de 100m, en forma polarizada transversal al plano de incidencia.

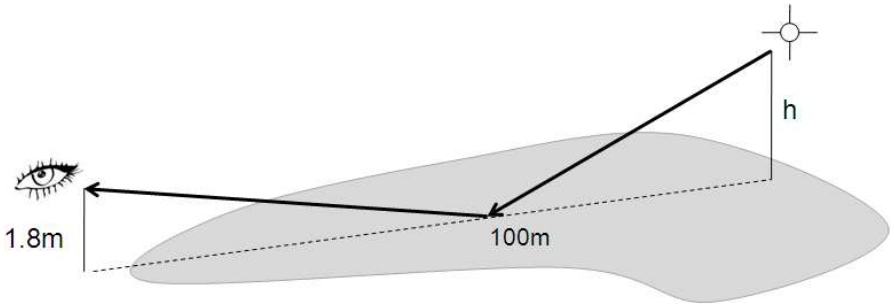


Figura 2

12. El material que conforma una fibra óptica tiene un índice de refracción n=1.55, calcule el mayor ángulo posible que se puede tener entre el eje de la fibra y un rayo de luz que se propague en ella si se encuentra rodeada de: (a) Aire. (b) Un medio n=1.53.

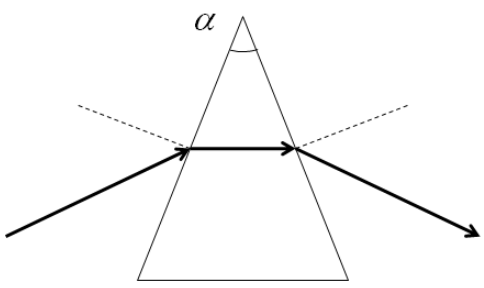
13. Calcule el ángulo en el cual debe incidir desde un dieléctrico n=1.65 hacia el aire, un rayo de luz para que el campo eléctrico incidente y el reflejado tengan un desfase de 90º si la onda incidente está polarizada en modo TE. Calcule el porcentaje de energía que se refleja dentro del medio.

14. Una onda con polarización circular dextrógira, incide en forma normal desde el aire sobre un bloque de plexiglás ε_r=3.45. Calcule el porcentaje de potencia reflejada y transmitida, así como el tipo de polarización de las ondas reflejada y transmitida.

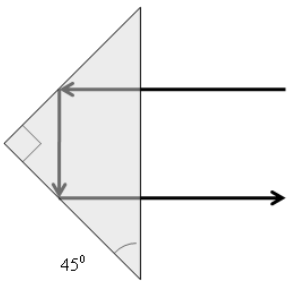
15. Repita el problema anterior, suponiendo que la onda incide con el ángulo de Brewster y que el plano de incidencia corresponde al plano ZY, mientras la frontera entre los medios coincide con al plano ZX y la onda incide desde la izquierda.

16. Un prisma de Brewster está construido, como se muestra en la figura 4a, con un material n=1.45. Encuentre el ángulo α y la reflectancia y transmitancia en la cara izquierda del prisma. Calcule las pérdidas por reflexión que se generan en dicha cara.

17. Un prisma se construye con una material que garantiza la reflexión total de un rayo de luz, como se muestra en la figura b. Encuentre el índice de refracción mínimo que debe tener el prisma y la permitividad relativa del material constructivo. Calcule las pérdidas totales por reflexión obtenidas cuando la onda incidente tiene: (a) polarización p, (b) polarización s, (c) polarización circular.



(a)



(b)

18. En el prisma del problema anterior, encuentre el ángulo de desfase entre el campo eléctrico reflejado y el incidente, así como las pérdidas totales por reflexión obtenidas cuando la onda incidente tiene: (a) polarización p, (b) polarización s.

Respuestas a los ejercicios

1. $\eta = (244 + j435)\Omega$
2. $P_2^+ = 95\frac{mW}{m^2}$ $P_1^- = 5\frac{mW}{m^2}$ $s = 1.58$ $x_{MAX} = 1.5m$ $x_{MIN} = 0m$
3. $R = 0.04$ $T = 0.96$ $\eta = 251\Omega$ $\epsilon_r = 2.25$
4. $|E_1^+| = |E_1^-| = 9.7\frac{V}{m}$ $|H_1^+| = |H_1^-| = 25.8\ \frac{mA}{m}$ $\eta_{Cu} = 37m\Omega\langle 45^0\rangle$ $\delta_p = 661nm$
   $P_1^- = 249.93\frac{mW}{m^2}$ $P_2^+ = 70\frac{uW}{m^2}$ $ROE = 14450$ $x_{E\_max} = x_{\eta\_max} = 0.75cm$

5. Caso 1:

   $\Gamma = -0.42 = 0.42\langle 180^0\rangle$ $\eta_{in} = 154\Omega$ $|E_1^+| = 11.3\frac{V}{m}$ $|E_1^-| = 4.75\frac{V}{m}$ $E_{1MAX} = 16.05\frac{V}{m}$ $E_{1MIN} = 6.56\frac{V}{m}$ $ROE = 2.52$ $x_{MIN} = 0cm$ $x_{MAX} = 7.5cm$ $R = 17.6\%$ $T = 82.4\%$

   Caso 2:

   $\Gamma = -0.12 - 0.23j = 0.3\langle 245^0\rangle$ $\eta_{in} = (258 - j152)\Omega\ = 300\langle -30^0\rangle\ \Omega$
   $|E_1^+| = 11.3\frac{V}{m}$ $|E_1^-| = 3.39\frac{V}{m}$ $E_{1MAX} = 14.7\frac{V}{m}$ $E_{1MIN} = 7.9\frac{V}{m}$
   $ROE = 1.86$ $x_{MIN} = 12.3cm$ $x_{MAX} = 2.4\ cm$ $R = 9\%$ $T = 91\%$

6. $v_p = 150\frac{km}{s}$ $\epsilon_r = 4$ $\sigma = 5.3 \times 10^{-6}\frac{S}{m}$ $\%P_{retorno} = 30.4\%$ $\%P_{disipada} = 18.8\%$ $\%P_{trans} = 50.8\%$ $\eta_{pant} = (271 - j368)\Omega$ $\eta_{diel} = 188.5\Omega$
7. Campo eléctrico y magnético

   $$E_{z1}^+ = 10^3 e^{j(\omega t - \beta y)} e^{-\alpha y}\ \vec{a}_Z\ V/m \qquad H_{x1}^+ = -\frac{10^3}{120\pi} e^{j(\omega t - \beta y)} e^{-\alpha y}\ \vec{a}_y\ A/m$$

   $$E_{z1}^- = -10^3 e^{j(\omega t + \beta y)} e^{-\alpha y}\ \vec{a}_Z\ V/m \qquad H_{x1}^- = \frac{10^3}{120\pi} e^{j(\omega t + \beta y)} e^{-\alpha y}\ \vec{a}_y\ A/m$$

   Coeficientes de propagación

   $$\Gamma = -1 \quad \tau = 0 \quad s = \infty \quad x_{max} = 75cm$$

   Vector de Poynting

   $$P_{y1}^+ = \frac{10^6}{(120\pi)} e^{-2\alpha y}\ \vec{a}_y\ W/m^2 \qquad P_{y1}^- = -\frac{10^6}{(120\pi)} e^{-2\alpha y}\ \vec{a}_y\ W/m^2$$

   $$P_{y2}^+ = 0\,\vec{a}_y\ W/m^2$$

Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para polarización de ondas EM:

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw-Hill, 2012. Páginas 337-343. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para incidencia normal e incidencia oblicua:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 496-522. ISBN 968-880-954-3.

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 347-375. ISBN 978-607-15-0783-9.

Capítulo 8

Ondas Electromagnéticas en medios guiados

Introducción

Son medios guiados aquellos que proporcionan un camino para que las ondas electromagnéticas se propaguen de una manera más fácil de un punto a otro.

Esto representa un mejoramiento en la eficiencia de la transmisión y una mayor confiabilidad en la recuperación de la señal por parte del receptor con respecto a los medios abiertos, pero tiene como principal inconveniente la necesidad de tener conexión física entre emisor y receptor, lo cual representa un problema en sistemas de comunicación de uno a muchos.

Los medios guiados incluyen básicamente los cables o líneas de transmisión, los sistemas de fibra óptica y las guías de onda.

En el presente capítulo, se tratara de modelar y estudiar los diferentes fenómenos que afectan la propagación de señales a través de este tipo de medios.

Líneas de transmisión

Las líneas de transmisión son sistemas formados por dos conductores separados por aislante, a través de las cuales se envía una señal electromagnética, representada en una diferencia de potencial y una corriente, desde un punto emisor a otro receptor.

Las líneas de transmisión se clasifican según la configuración geométrica de los conductores, el tipo de aislamiento, los tipos de conectores usados para iniciar y terminar la línea, etc.

Los requerimientos en la transmisión de señal y las consideraciones económicas definen el tipo de línea a usar en una aplicación específica; pero, independientemente del tipo de línea, se tienen ecuaciones de onda que rigen el comportamiento de la señal en cualquier línea.

Tipos de líneas de transmisión

Las líneas de transmisión se clasifican usando varios criterios, normalmente relacionados con la topología de la línea.

En sistemas de comunicaciones se usan los siguientes tipos:

Líneas balanceadas

Cuando la transmisión se hace por dos hilos, en los cuales uno hace de conductor principal y otro de retorno, la señal electromagnética se transmite como diferencia de potencial entre ambos conductores y ambos llevan la misma corriente.

Líneas desbalanceadas

Cuando la transmisión se hace por uno o varios hilos, pero se tiene un solo conductor de retorno el cual se encuentra conectado a tierra, la señal electromagnética se transmite como potencial respecto a tierra por cada uno de los conductores de la línea.

Dentro de las líneas balaceadas, los tipos de conductores más usados son los siguientes:

Líneas bipolares

Están constituidas por dos conductores paralelos con o sin aislamiento externo y con o sin aislamiento exterior.

Pertenecen a este grupo las líneas aéreas o de distribución locales de energía, cables de transmisión de potencia, y los cables para transmisión de datos UTP y STP.[29]

El perfil de este tipo de líneas se muestra en la figura 127.

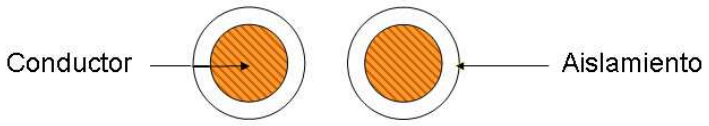


Figura 127. Perfil de una línea de transmisión bipolar

Líneas de placas paralelas

Están constituidas por dos conductores planos paralelos con o sin aislamiento externo y con o sin aislamiento exterior.

Pertenecen a este grupo, algunos bobinados de máquinas eléctricas rotativas.

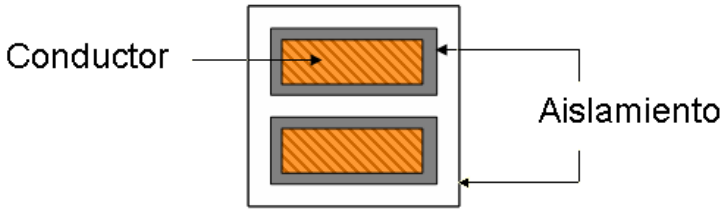


Figura 128. Perfil de una línea de transmisión de placas paralelas

[29] Unshielded Twisted Pair & Shielded Twisted Pair. Par trenzado no enchaquetado y enchaquetado por sus siglas en inglés.

Líneas coaxiales

Están constituidas por un conductor interior aislado, cubierto por un conductor externo que actúa como jaula de Faraday; el conjunto se encuentra enchaquetado en un aislante externo.

Son muy utilizadas en aplicaciones de cables para instrumentación y televisión UHF.

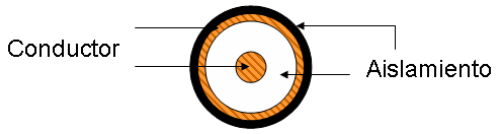


Figura 129. Perfil de una línea de transmisión coaxial

Parámetros eléctricos de líneas de transmisión

Independientemente del tipo de línea de transmisión, existen unos parámetros que son de uso común en el modelado de la línea.

El cambio en el tipo de línea afecta la forma de calcular los parámetros de la misma, debido a las consideraciones de tipo geométrico, pero los parámetros usados para modelar líneas de transmisión son siempre los mismos.

Sin excepción, todos los parámetros se expresan en valores por unidad de longitud, si se desea calcular los valores totales, basta con multiplicar el parámetro por la longitud total de la línea.

Resistencia eléctrica serie R

La resistencia eléctrica total de un conductor se calcula con la expresión clásica de resistencia DC.

$$R_n = \frac{l}{\sigma S}$$

La resistencia por unidad de longitud se obtiene a partir de esta expresión, al dividir la resistencia por la longitud de la línea.

$$R = \frac{R_n}{l} = \frac{1}{\sigma S}$$

Las dimensiones y los valores de resistencia eléctrica para conductores cilíndricos elaborados en cobre se encuentran normalizados por la ANSI[30] en la tabla denominada AWG, por American Wire Gauge, es decir calibre de alambre estándar americano.

[30] American National Standars Institute – Instituto Nacional de Estándares Americano, quien se encarga de definir los estándares de calidad que deben cumplir los industriales en los Estados Unidos, y cuyas normas son de aceptación y reconocimiento mundial.

Tabla 15. Calibre AWG y resistencia eléctrica para conductores de uso común en electricidad y electrónica

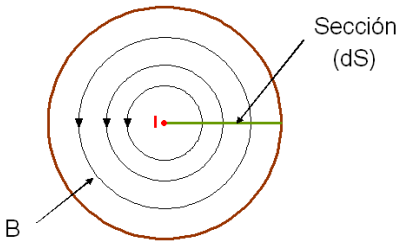
Calibre AWG	ϕ mm	Sección mm2	R(DC) Ω/km	Calibre AWG	ϕ mm	Sección mm2	R(DC) Ω/km
1	7,348	42,41	0,4066	21	0,723	0,411	42,00
2	6,544	33,63	0,5126	22	0,644	0,326	52,93
3	5,827	26,67	0,6465	23	0,573	0,258	66,86
4	5,189	21,15	0,8153	24	0,511	0,205	84,07
5	4,621	16,77	1,0280	25	0,455	0,163	106,04
6	4,115	13,30	1,2964	26	0,405	0,129	133,84
7	3,665	10,55	1,6343	27	0,361	0,102	168,45
8	3,264	8,367	2,0605	28	0,321	0,081	213,05
9	2,906	6,633	2,5995	29	0,286	0,064	268,38
10	2,588	5,260	3,2776	30	0,255	0,051	337,60
11	2,305	4,173	4,1318	31	0,227	0,040	426,02
12	2,053	3,310	5,2084	32	0,202	0,032	538,00
13	1,828	2,624	6,5695	33	0,180	0,025	677,54
14	1,628	2,082	8,2827	34	0,160	0,020	857,52
15	1,450	1,651	10,441	35	0,143	0,016	1073,5
16	1,291	1,309	13,171	36	0,127	0,013	1361,1
17	1,150	1,039	16,599	37	0,113	0,010	1719,2
18	1,024	0,824	20,935	38	0,101	0,008	2152,0
19	0,912	0,653	26,393	39	0,090	0,006	2710,2
20	0,812	0,518	33,294	40	0,080	0,005	3430,1

Para obtener una aproximación a la resistencia real de la línea, se debe hacer la corrección por efecto superficial de acuerdo con la frecuencia de operación de la línea.

Inductancia serie L

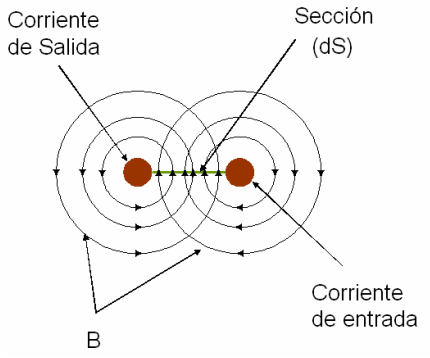
La inductancia serie equivalente por unidad de longitud de cualquiera de los tipos de líneas se calcula como la suma de la inductancia mutua y la inductancia propia de cada conductor.

$$L_T = L_{propia\text{-}ida} + L_{propia\text{-}retorno} + L_{mutua}$$



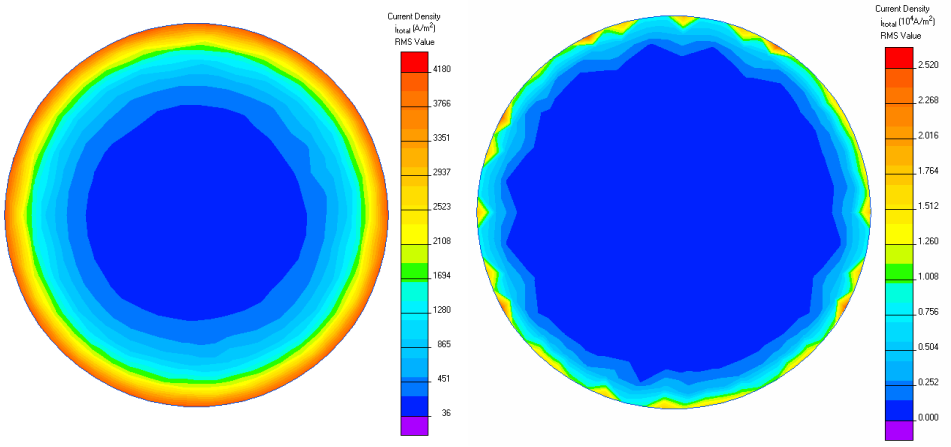
$$\psi_m = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \qquad L = \frac{\psi_m}{I}$$

En el cálculo de la inductancia propia, se toman en cuenta los enlazamientos de flujo ocurridos al interior del conductor, mientras que para el cálculo de la inductancia mutua se deben tomar los enlazamientos de flujo que ocurren en la región entre conductores.



$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \qquad \psi_m = n\phi_m \qquad L = \frac{\psi_m}{I}$$

Cuando la frecuencia se hace muy alta, la corriente circula por la piel del conductor, haciendo prácticamente nulos los enlazamientos de flujo al interior del mismo, como se muestra en la figura 130.



100kHz **1MHz**

Figura 130. Perfil de un conductor cilíndrico ilustrando la disminución en los enlazamientos de flujo debido al efecto superficial en dos frecuencias diferentes[31]

Es por esto que en alta frecuencia no se debe considerar la inductancia propia, en el cálculo de la inductancia total de la línea.

[31] Simulaciones realizadas con Quickfield. Software de elementos finitos de Tera Analysis. Disponible en www.Quickfield.com

Se puede considerar como alta frecuencia, aquella región en la cual la profundidad de penetración de la señal en el conductor es despreciable frente a las dimensiones físicas del mismo, en particular a su diámetro en el caso de conductores cilíndricos.

Cuando la profundidad de penetración es comparable con las dimensiones físicas del conductor, entonces se considera zona de frecuencias medias, y cuando es mayor que éstas, se considera zona de frecuencias bajas.

Capacitancia paralela C

La capacitancia paralela aparece a causa de la diferencia de potencial entre conductores y a la polarización del medio dieléctrico que los separa.

Se calcula usando la Ley de Gauss alrededor de uno de los electrodos de la línea y la ecuación de Laplace en el medio que las rodea, como se ilustra en las figuras 131 y 132.

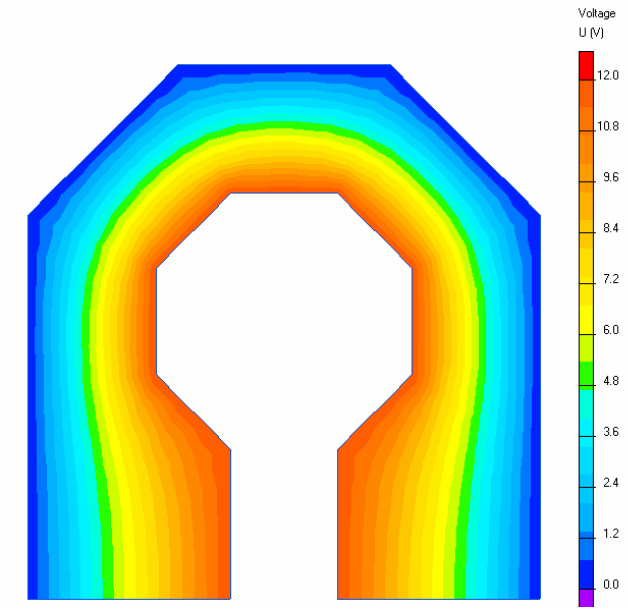


Figura 131. Equipotenciales usadas para el cálculo de capacitancia entre dos conductores de un circuito impreso

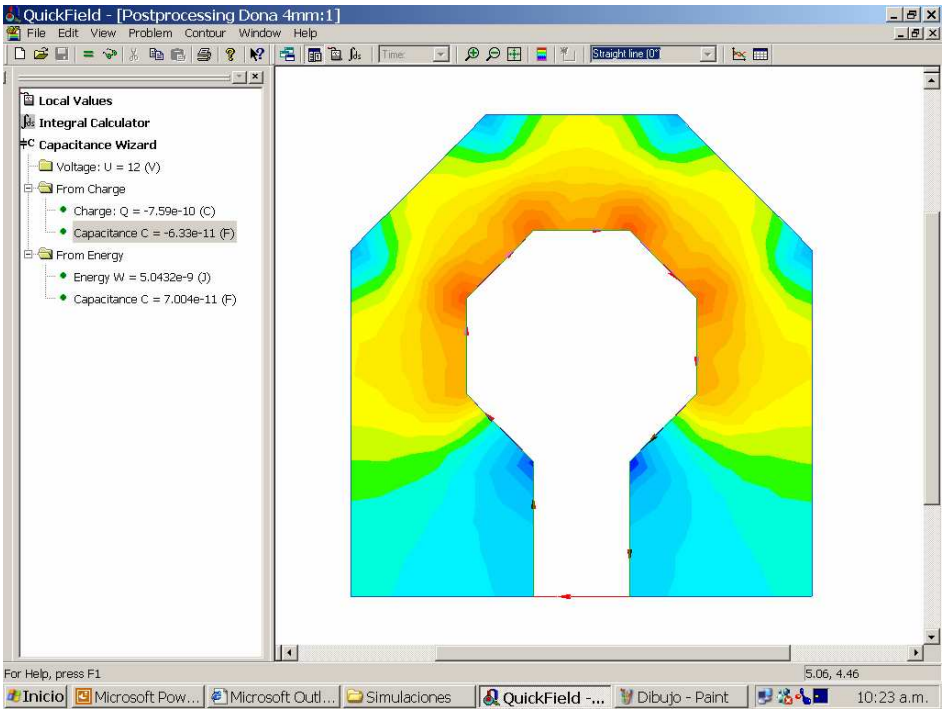


Figura 132. Contorno usado para el cálculo de carga encerrada en el cálculo de capacitancia entre dos conductores de un circuito impreso

Conductancia paralela G

La conductancia paralela se debe a la diferencia de potencial entre conductores y a la conductividad no nula del medio dieléctrico que los separa.

A pesar de que los conductores se encuentran aislados, el aislante no tiene una conductividad nula, por lo que al aplicar una diferencia de potencial aparece una pequeña corriente de fuga entre conductores.

Esta corriente de fuga es una corriente de conducción y es usualmente muy pequeña, por lo que en la mayoría de las ocasiones se decide, voluntariamente, no considerarla en el modelo de la línea.

De todas formas, la consideración o no de dicha corriente, depende de la tangente de pérdidas del aislante que separa los dos conductores.

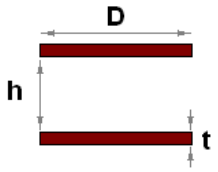
La tangente de pérdidas del aislante se calcula como:

$$Tan\delta = \frac{G}{\omega C}$$

A continuación, se muestran los parámetros eléctricos de un conjunto de líneas; los rangos de baja media y alta frecuencia se toman como las frecuencias en las cuales la profundidad de penetración es comparable con las dimensiones físicas del conductor.

Línea de doble cinta

La línea de doble cinta está constituida por dos placas paralelas, separadas por una capa de aislamiento que normalmente es de espesor menor al ancho de la línea.

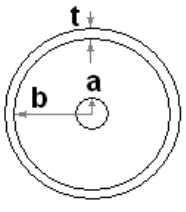


$D \gg h$

Parámetro	Baja frecuencia	Media frecuencia	Alta frecuencia
	$\delta_p > t$	$\delta_p \approx t$	$\delta_p < t$
R	$\frac{2}{\sigma_c D t}$	$\frac{2}{\sigma_c D \delta_p}$	
G	$\frac{\sigma_d D}{h}$		
L	$\mu_0\left(\frac{1}{4\pi}+\frac{h}{D}\right)$	$\mu_0\left(\frac{1}{8\pi}+\frac{h}{D}\right)$	$\frac{\mu_0 h}{D}$
C	$\frac{\varepsilon D}{h}$		

σ_c: Conductividad del conductor
σ_d: Conductividad del dieléctrico

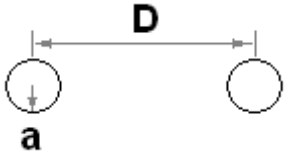
Línea coaxial



$b \gg t$

Parámetro	Baja frecuencia	Media frecuencia	Alta frecuencia
	$\delta_p > a$	$a > \delta_p > t$	$\delta_p < t$
R	$\frac{1}{\pi\sigma_c}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2bt}\right)$	$\frac{1}{\pi\sigma_c}\left(\frac{1}{a^2}\times\frac{R_{AC}}{R_{DC}}+\frac{1}{2bt}\right)$	$\frac{1}{2\pi\sigma_c\delta_p}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
G	$\frac{2\pi\sigma_d}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$		
L	$\frac{\mu_0}{2\pi}\left[1+Ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\left[1+2Ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$	$\frac{\mu_0}{2\pi}Ln\left(\frac{b}{a}\right)$
C	$\frac{2\pi\varepsilon}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$		

Línea bifilar



$D \gg a$

Parámetro	Baja frecuencia	Frecuencia media	Alta frecuencia
	$\delta_p > a$	$\delta_p \approx a$	$\delta_p \ll a\ ;\ \left(\frac{1}{10}\right)$
R	$\frac{2}{\pi\sigma_c a^2}$	$\frac{2}{\pi\sigma_c a^2}\frac{R_{AC}}{R_{DC}}$	$\frac{1}{\pi\sigma_c a\delta_p}$
G	$\frac{\pi\sigma_d}{Cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}$		
L	$\frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{2}+Cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)\right)$		$\frac{\mu_0}{\pi}Cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)$
C	$\frac{\pi\varepsilon}{Cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}$		

$$Cosh^{-1}(x) = Ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ ;\ \ x \geq 1$$

Ejemplo 88. Parámetros eléctricos líneas de transmisión.

Un cable coaxial tiene los siguientes parámetros geométricos:

$$a = 0.32mm \quad b = 3mm \quad t = 80um$$

Está construido en cobre $\sigma_c = 5.8 \times 10^7 Sm/m$, con aislamiento de espuma de polietileno: $\epsilon_r = 2.25 \quad \sigma_d = 10^{-16} Sm/m \quad \mu_r = 1.0$

Calcule los parámetros eléctricos RLCG

Solución:

Profundidad de penetración de la onda en el conductor:

$$\delta_p = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma_c \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 150 \times 10^3 \times 5.8 \times 10^7 \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 170\mu m$$

Dado que: $a = 320\mu m \qquad t = 80\mu m \qquad \Longrightarrow \qquad Frecuencia\ media$

$$R = \frac{1}{\pi \sigma_c}\left(\frac{1}{a^2} \times \frac{R_{AC}}{R_{DC}} + \frac{1}{2bt}\right)$$

Del texto: $\frac{R_{DC}}{R_{AC}} = \frac{2}{(\alpha a)^2}[(\alpha a - 1) + e^{-\alpha a}] = 0.584$

Por lo tanto: $R = \frac{1}{\pi \times 5.8 \times 10^7}\left(\frac{1}{(0.32 \times 10^{-3})^2} \times \frac{1}{0.584} + \frac{1}{2 \times 3 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^{-6}}\right)$

$$R = 103m\Omega/m$$

$$G = \frac{2\pi\sigma_d}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi \times 10^{-16}}{Ln\left(\frac{3}{0.32}\right)} = 2.8 \times 10^{-16} Sm/m$$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[1 + 2Ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] = 10^{-7}\left[1 + 2 \times Ln\left(\frac{3}{0.32}\right)\right] = 547nH/m$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi \times 2.25 \times \varepsilon_0}{Ln\left(\frac{3}{0.32}\right)} = 55.8pF/m$$

En la figura 133, se encuentran los parámetros geométricos y algunos parámetros eléctricos de varios tipos de cable coaxial.

Type	Conductor	Insulation	Braid Shield	Jacket	Nominal Impedance	Capacitance	Attenuation 100MHZ
	AWG	mm	mm	mm	Ohm	pf/m	dB/km
RG-5/U	16	4.70	0.16	8.4 ± 0.2	52.5	93.5	85
RG-6/U	18	4.57	0.16	7.4 ± 0.2	75.0	56.8	69
RG-7/U	19	6.35	0.18	9.4 ± 0.2	94.5	41.0	66
RG-29/U	20	2.95	0.13	4.7 ± 0.15	53.5	93.5	138
RG-34/U	21	11.6	0.16	15.9 ± 0.25	71.0	70.5	46
RG-59/U	22	3.71	0.16	6.15 ± 0.15	73.0	68.9	125

Figura 133. Parámetros típicos de algunos tipos de cable coaxial

Modelos de líneas de transmisión

Dependiendo de la longitud eléctrica de la línea, es decir la relación que existe entre la línea física y la longitud de onda, se pueden usar diferentes modelos para representar la línea dentro del sistema de telecomunicaciones.

En líneas cortas o muy cortas ($\ell \ll 0.25\lambda$), se permite el uso de modelos de parámetros concentrados, ya que no se presentan ondas estacionarias. En líneas medias o largas ($\ell \geq 0.25\lambda$), definitivamente se deben usar modelos de parámetros distribuidos.

La forma más simple de aproximar la velocidad de propagación de una onda a través de una línea de transmisión es:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La longitud de onda se relaciona con la velocidad de fase mediante la ecuación:

$$\lambda = \frac{v_p}{f}$$

Por ejemplo, para una línea de transmisión que tenga una inductancia distribuida de 547nH/m y una capacitancia de 80pF/m, la longitud de una señal de 100MHz sería:

$$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{LC}} = \frac{1}{10^8 \times \sqrt{547 \times 10^{-9} \times 80 \times 10^{-12}}} = 1.5m$$

Es decir, una línea de 40cm. de este cable debe ser considerada línea media y modelada con parámetros distribuidos.

Modelos de parámetros concentrados

Los modelos de parámetros concentrados equivalen al modelo de red de dos puertos con parámetros de transmisión o transmisión inversa y son válidos para casos en los que no interesa el flujo de señal a través de la línea, sino los valores de entrada y salida de la misma.

$$v_i = Av_0 + Bi_0 \qquad v_0 = A'v_i + B'i_i$$
$$i_i = Cv_0 + Di_0 \qquad i_0 = C'v_i + D'i_i$$

Los parámetros ABCD salen de las ecuaciones de red de dos posibles circuitos equivalentes, denominados modelos T y Pi.

Los parámetros concentrados se obtienen multiplicando los parámetros distribuidos por la longitud de la línea.

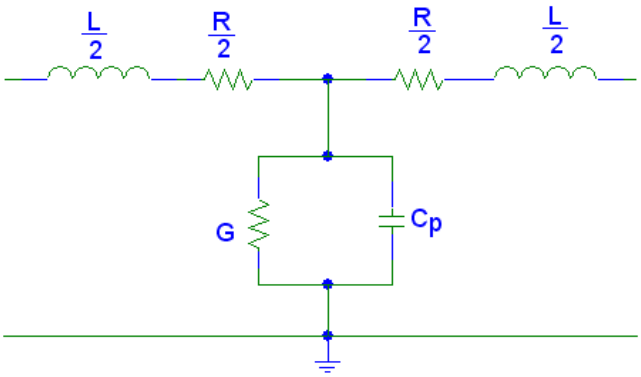


Figura 134. Modelo T, se distribuye la resistencia y la inductancia serie, y se dejan concentradas la capacitancia y la conductancia paralela

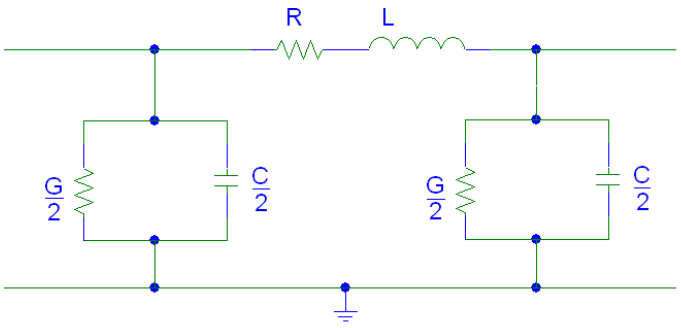
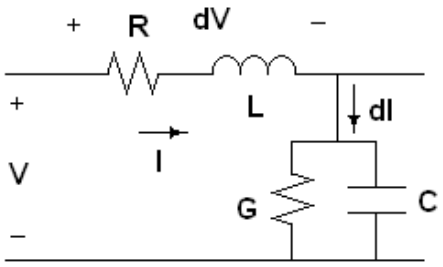


Figura 135. Modelo Pi, se distribuye la capacitancia y la conductancia paralela; la resistencia y la inductancia serie se dejan concentradas

Modelos de parámetros distribuidos

En el modelo de parámetros distribuidos, éstos no se concentran, sino que se modela la línea considerando la caída de tensión y las pérdidas en cada segmento diferencial de línea.



Este modelo permite estudiar el comportamiento de la señal a lo largo de la línea y no solo en sus extremos. Además de modelar la dinámica de la línea para análisis transitorio.

La caída diferencial de voltaje en un segmento de línea es:

$$\frac{dV}{dx} = (R + j\omega L) I$$

Mientras que la fuga diferencial de corriente es:

$$\frac{dI}{dx} = (G + j\omega C) V$$

Si se hace una segunda derivada con respecto a la distancia se encuentra:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = (R + j\omega L)\frac{dI}{dx}$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = (G + j\omega C)\frac{dV}{dx}$$

Reemplazando la ecuación de la primera derivada espacial, en la segunda se obtienen ecuaciones de onda EM para voltaje y corriente:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V = \gamma^2 V$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)I = \gamma^2 I$$

La solución, al igual que en el caso de los medios abiertos, es una función exponencial compleja que varía con el tiempo y la distancia. En el caso de una alimentación senoidal.

Las soluciones para voltaje y corriente quedan:

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$$

$$\gamma = \pm\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

$$V(x) = V_0 e^{\gamma x} = V_0 e^{\alpha x} Cos(\beta x)$$

Lo cual representa un voltaje que varía en forma senoidal con la distancia y se atenúa paulatinamente dependiendo de la constante de atenuación α.

Para el caso de la corriente la solución queda:

$$I(x) = I_0 e^{\gamma x} = I_0 e^{\alpha x} Cos(\beta t) = \frac{V_0}{Z_0} e^{\alpha x} Cos(\beta x)$$

Donde la constante Zo es:

$$Z_0 = \frac{dV}{dI} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Denominada impedancia intrínseca de la línea.

Cuando las corrientes y voltajes son senoidales a la entrada de la línea:

$$V_0 = V_p e^{j\omega t} \qquad\qquad I_0 = I_p e^{j\omega t}$$

La solución queda de la forma:

$$V(x) = V_0 e^{\gamma x} = V_p e^{j\omega t} e^{\alpha x} e^{j\beta x}$$

La cual se pasa al dominio del tiempo como:

$$V(x,t) = V_p e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} = V_p e^{\alpha x} Cos(\omega t + \beta x)$$

Lo cual representa una onda viajera igual que en el caso de los medios abiertos.

En el caso de la corriente la ecuación de onda queda:

$$I(x,t) = \frac{V_p}{Z_0} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} = \frac{V_p}{Z_0} e^{\alpha x} Cos(\omega t + \beta x)$$

Las constantes de propagación para esta onda son las mismas que en los medios abiertos:

Constante de fase (β), representa el corrimiento de fase por unidad de longitud recorrida a lo largo de la línea, se mide en radianes/m.

Constante de atenuación (α), representa la atenuación sufrida por el voltaje y la corriente a lo largo de la línea. Se mide en nieper/m, aunque al igual que en los medios abiertos se puede expresar en escala logarítmica.

$$\propto_{dB/m} = -8.68 \propto \left({}^{Np}/_{m}\right)$$

Constante de propagación (γ), es la suma compleja de las otras dos contantes:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Velocidad de propagación o velocidad de fase (v_p),

es la velocidad con la que se desplaza la onda a lo largo de la línea:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

Factor de velocidad (f_v),

es la relación entre la velocidad de fase y la velocidad de la luz en el vacío.

$$f_v = \frac{v_p}{c_0}$$

Tiempo de retardo

La velocidad de fase define el retardo en tiempo que se obtiene al recorrer una distancia X a lo largo de la línea:

$$\Delta t(retardo) = \frac{x}{v_p}$$

Longitud de onda (λ)

Es la distancia que recorre la onda para sufrir un corrimiento de fase de 2π radianes:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Existe una relación que surge de forma inmediata entre la frecuencia y la longitud de onda:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Reemplazando en la velocidad de fase:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega \times \lambda}{2\pi} = \lambda f$$

Dado que la velocidad de propagación es una constante, cuyo valor depende de los parámetros eléctricos de la línea, la longitud de onda y la frecuencia son inversamente proporcionales en todas las líneas de transmisión, independientemente de su tipo.

Modelos reducidos de parámetros distribuidos

Dependiendo de la relación entre los parámetros eléctricos de una línea de transmisión, se definen como un conjunto de modelos reducidos que permiten obtener de forma más simple las constantes de propagación.

Los modelos reducidos son de gran utilidad en el trabajo de campo, pues simplifican los cálculos facilitando las aplicaciones de las ecuaciones de onda.

Modelo RLC

El modelo completo, analizado en el aparte anterior, se llama modelo RLGC porque toma en cuenta todos los parámetros de la línea.

La conductancia paralela, sin embargo, no siempre se toma en cuenta, dado que la tangente de pérdidas en los cables es normalmente muy baja.

Si la tangente de pérdidas del aislante del conductor es despreciable, se puede optar por un modelo reducido, llamado modelo RLC, en el cual no se toma en cuenta la conductancia paralela.

$$Tan\delta = \frac{G}{\omega C}$$

La relación entre la conductancia paralela y la capacitancia a una frecuencia específica determina si se toma en cuenta o no el efecto del parámetro G:

$$\omega C \gg G \rightarrow Se\ desprecia\ G$$

Ejemplo 89. Tangente de pérdidas de una línea de transmisión.

Una línea de transmisión tiene una conductancia paralela $G = 10^{-15} Sm/m$ y una capacitancia distribuida de $C = 56pF/m$. Calcule la tangente de pérdidas del cable a una frecuencia de 10kHz.

Encuentre la frecuencia límite, en la cual la tangente de pérdidas se hace despreciable (< 0.01).

Solución:

La tangente de pérdidas del cable:

$$Tan\delta = \frac{G}{\omega C}$$

$$Tan\delta = \frac{10^{-15}}{2\pi \times 10^4 \times 56 \times 10^{-12}} = 3 \times 10^{-10}$$

A esta frecuencia la tangente de pérdidas es absolutamente despreciable.

Para calcular la frecuencia límite se tiene:

$$Tan\delta = \frac{G}{\omega C} \leq 0.01$$

Se despeja f:

$$\frac{G}{2\pi C} \leq 0.01f$$

Finalmente:

$$f \geq \frac{G}{0.02\pi C}$$

Reemplazando:

$$f \geq \frac{10^{-15}}{0.02\pi \times 56 \times 10^{-12}} \geq 3 \times 10^{-4} Hz$$

Es decir que este cable es RLC en prácticamente todas las frecuencias

Modelo LC con pérdidas

A partir del modelo RLC se puede hacer una segunda simplificación, en este caso cuando la resistencia serie del modelo –corregida por efecto piel– es mucho más baja que el producto de la inductancia por la frecuencia angular:

$$\omega L \gg R \rightarrow Se\ desprecia\ R$$

En este modelo, el parámetro R no se toma en cuenta para el cálculo de la constante de propagación y fase, por lo tanto, este parámetro no influye en la velocidad de propagación ni la longitud de onda.

Sin embargo, al igual que en los dieléctricos de bajas pérdidas, el parámetro R influye en la atenuación a lo largo de la línea.

En alta frecuencia, todas las líneas tienden a ser LC con pérdidas, ya que la resistencia se incrementa por efecto piel con el cuadrado de la frecuencia, pero el producto WL se incrementa con la primera potencia de la frecuencia, es decir, lo hace más rápido.

Una línea se considera LC con pérdidas cuando la resistencia serie es 10 veces menor al producto WL; es decir, se puede establecer una frecuencia de referencia a partir de la cual la línea se considera dentro de este modelo.

$$R \leq \frac{1}{10}\omega L$$

Despejando la frecuencia:

$$f \geq \frac{10R}{2\pi L}$$

Ejemplo 90. Frecuencia crítica de una línea de transmisión.

Una línea de transmisión RLC tiene una resistencia serie de $R = 0.3\ \Omega/m$ y una inductancia distribuida de $L = 547nH/m$. Calcule la relación R/WL a una frecuencia de 10kHz.

Encuentre la frecuencia límite, en la cual la resistencia se hace despreciable frente a WL (< 0.1).

Solución:

La relación R/WL:

$$Tan\delta = \frac{G}{\omega C}$$

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{0.3}{2\pi \times 10^4 \times 547 \times 10^{-9}} = 8.7$$

A esta frecuencia la resistencia no es para nada despreciable, el modelo es RLC.

Para calcular la frecuencia límite se tiene:

$$f \geq \frac{10R}{2\pi L}$$

Reemplazando:

$$f \geq \frac{3}{2\pi \times 547 \times 10^{-9}} \geq 873kHz$$

Es decir que este cable es RLC hasta frecuencias cercanas a 1MHz, de allí en adelante se puede considerar LC con pérdidas.

Línea LC

Este tipo de línea es ideal, es aquella que no tiene pérdidas ni por atenuación en el dieléctrico ni tampoco en la resistencia serie. Corresponde a un modelo de referencia, porque en realidad cables LC puros no existen.

Su utilidad se limita a cálculos en casos en que la atenuación es despreciable ($< 0.1dB$) o en que la línea no es muy larga.

En la tabla 16, se resumen los parámetros de propagación para los distintos tipos de modelos reducidos de parámetros distribuidos.

Tabla 16. Parámetros de propagación para los diferentes modelos de parámetros distribuidos

Modelo/ Parámetros de propagación	RLCG	RLC(G<<ωC)	LC con pérdidas (R<<ωL)	LC
α	Re(γ)		$\frac{R}{2Zo}$	0
β	Im(γ)		$\omega\sqrt{LC}$	
γ	$\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$	$\sqrt{j\omega C(R+j\omega L)}$	$j\beta$	
Zo	$\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$	$\sqrt{\frac{R+j\omega L}{j\omega C}}$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	

Ejemplo 91. Parámetros de propagación en líneas de transmisión.

Una línea de transmisión tiene los siguientes parámetros eléctricos:

$R = 0.103\ \Omega/m\ L = 547nH/m\ \ G = 2.8 \times 10^{-16}Sm/m\ \ \ C = 55.8pF/m$

Medidos a 150kHz.

Calcule los parámetros de propagación, la velocidad de propagación, la longitud de onda y la atenuación en dB/km.

Solución:

Para calcular los parámetros de propagación, se define el modelo:

$$\omega C = 2\pi \times 150 \times 10^3 \times 55.8 \times 10^{-12} = 5.26 \times 10^{-5}\text{Sm/m} \gg G$$

Se desprecia G:

$$\omega L = 2\pi \times 150 \times 10^3 \times 547 \times 10^{-9} = 516\frac{m\Omega}{m} \cong R = 103\frac{m\Omega}{m}$$

R no es despreciable, por lo tanto modelo RLC:

$$\gamma = \sqrt{j\omega C(R + j\omega L)} = \sqrt{5.26 \times 10^{-5} j \times (0.103 + 0.516j)}$$

$$\gamma = (5 + j52) \times 10^{-4} = 53 \times 10^{-4} < 84^0$$

$$\propto = 0.5 Np/km \qquad \beta = 5.2 \text{ rad/km}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{0.103 + j0.516}{j5.26 \times 10^{-5}}} = 100 < -5.6^0$$

La velocidad de propagación en la línea:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 150 \times 10^3 rad/seg}{5.2 rad/km} = 181000 km/seg$$

El factor de velocidad:

$$f_v = \frac{181000 km/s}{300000 km/s} = 0.604$$

La longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi rad}{5.2 rad/km} = 1.208 km$$

La atenuación en dB:

$$\propto_{dB/km} = -8.68 \propto \left({}^{Np}/_{km}\right) = -8.68 \times 0.5 = -4.34 dB/km$$

Propagación en líneas de transmisión acotadas

Cuando las líneas de transmisión se encuentran terminadas en una impedancia de carga, como se muestra en la figura 136, se presentan fenómenos de reflexión y transmisión, de forma semejante a como ocurren en medios abiertos acotados.

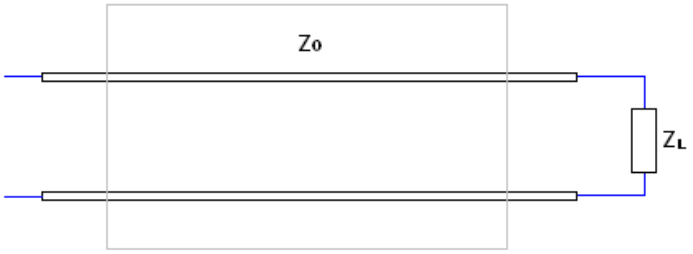


Figura 136. Línea de transmisión terminada en una carga

Independientemente de la configuración de la línea, las líneas de campo eléctrico y las de campo magnético son perpendiculares a la dirección de propagación de la señal (corresponden a un modo TE), tal como se observa en la figura 137. En donde se muestra un corte transversal de un conductor coaxial, ilustrando las Líneas de Fuerza del campo eléctrico y magnético.

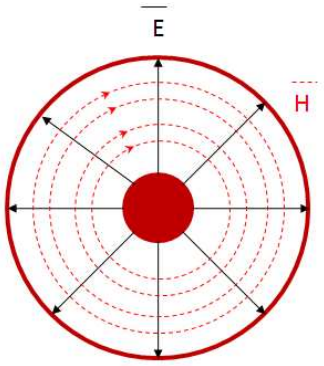


Figura 137. Líneas de Fuerza del campo magnético (punteado) y del campo eléctrico (continua) en el interior de un conductor coaxial

Debido al efecto superficial, los campos E y H se propagan esencialmente a través del dieléctrico, por lo que la incidencia de la onda sobre una impedancia conectada a la línea se convierte en un problema de incidencia perpendicular.

La proporcionalidad entre la intensidad de campo eléctrico E y la diferencia de potencial, así como entre la intensidad de campo magnético H y la corriente eléctrica, de acuerdo con la Ley de Biot-Savart, indican que los fenómenos asociados a la reflexión de campos eléctrico y magnético, en un caso de incidencia perpendicular, se pueden extrapolar a la corriente y el voltaje que se transmiten a lo largo de una línea.

Para el caso de una onda de voltaje:

$$\Gamma = \frac{E_{y1}^{-}}{E_{y1}^{+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Dado que la diferencia de potencial entre conductores y el campo eléctrico son proporcionales, se tiene:

$$\Gamma = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Donde Z_L y Z_0 son la impedancia equivalente de la carga y la impedancia intrínseca de la línea, respectivamente. El vector V_1^+ representa el voltaje incidente y V_1^- el voltaje reflejado.

La onda de voltaje total sería la suma de las ondas incidente y reflejada, igual que en el caso del campo eléctrico:

$$V_{s1} = V_1^+ e^{-j\beta x} + V_1^- e^{j\beta x}$$

Para el caso de la corriente se tiene:

$$\Gamma = -\frac{H_{z1}^-}{H_{z1}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Como la corriente es directamente proporcional a la corriente, se tiene una corriente incidente y una reflejada, cuya relación es:

$$\Gamma = -\frac{I_1^-}{I_1^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

La onda de corriente total sería la suma de las ondas incidente y reflejada, igual que en el caso del campo magnético:

$$I_{s1} = I_1^+ e^{-j\beta x} + I_1^- e^{j\beta x}$$

Existe un voltaje y corriente transmitidos hacia la carga, los cuales por condiciones de frontera deben ser iguales al voltaje y la corriente total incidentes del lado de la línea, justo en el punto de conexión.

$$\tau = \frac{V_2^+}{V_1^+} = \frac{I_2^+}{I_1^+} = 1 + \Gamma$$

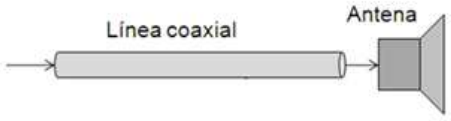
El coeficiente de transmisión en función de las impedancias de línea y carga queda:

$$\tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}$$

Ejemplo 92. Reflexión en líneas de transmisión acotadas.

Una línea de transmisión LC sin pérdidas, L=0.5μH/m y un C=200pF/m se encuentra acoplando un generador $Z_g = 50\Omega$ con una antena tipo cuerno $Z_L = (75 - j30)\Omega$.

Calcule el coeficiente de transmisión y el coeficiente de reflexión.



Solución:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0.5 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-12}}} = 50\Omega$$

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{75 - j30 - 50}{75 - j30 + 50}$$

$$\Gamma = \frac{25 - j30}{125 - j30}$$

$$\Gamma = 0.243 - 0.182i = 0.3\langle -37^0 \rangle$$

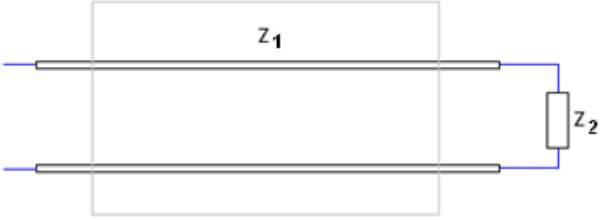
El coeficiente de transmisión:

$$\tau = 1 + \Gamma = 1.243 - 0.182i = 1.26\langle -8.3^0 \rangle$$

Impedancia de entrada en líneas de transmisión acotadas

Al igual que en el caso de los medios abiertos acotados, la impedancia de entrada de la línea se entiende como la relación entre el voltaje total y la corriente total:

$$Z_{in} = \frac{V_{s1}}{I_{s1}} = \frac{V_1^+ e^{-j\beta x} + V_1^- e^{j\beta x}}{I_1^+ e^{-j\beta x} + I_1^- e^{j\beta x}}$$



En términos de la impedancia de la línea y de la carga, la ecuación de la impedancia de entrada queda:

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_2 Cos(\beta x) + jZ_1 Sin(\beta x)}{Z_1 Cos(\beta x) + jZ_2 Sin(\beta x)}$$

La cual es una ecuación análoga a la de la impedancia en medios abiertos acotados- incidencia perpendicular.

En términos de la longitud eléctrica de la línea se tiene:

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_2 Cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + jZ_1 Sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)}{Z_1 Cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + jZ_2 Sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)}$$

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_2 Cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + jZ_1 Sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)}{Z_1 Cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + jZ_2 Sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)}$$

Dado que la relación entre la longitud física de la línea X y la longitud de onda λ es equivalente a la longitud eléctrica (ℓ). La ecuación para la impedancia de entrada queda:

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_2 Cos(2\pi \ell) + jZ_1 Sin(2\pi \ell)}{Z_1 Cos(2\pi \ell) + jZ_2 Sin(2\pi \ell)}$$

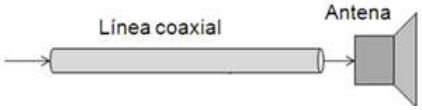
En términos de la función tangente:

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_2 + jZ_1 Tan(2\pi \ell)}{Z_1 + jZ_2 Tan(2\pi \ell)}$$

Ejemplo 93. Impedancia de entrada en líneas de transmisión acotadas.

Una línea de transmisión coaxial sin pérdidas, $Z_0 = 50\Omega$ termina en una antena tipo cuerno $Z_L = (75 - j30)\Omega$.

Calcule la impedancia de entrada si la línea tiene una longitud de a) 0.125λ, b) 0.3λ.



Solución:

La ecuación para la impedancia de entrada queda:

$$Z_{in} = 50\Omega \frac{(75 - j30) + j(50)Tan(2\pi \ell)}{50 + j(75 - j30)Tan(2\pi \ell)}$$

Para el primer caso: $\ell = 0.125$

$$Z_{in}(0.125\lambda) = 50\Omega \frac{(75 - j30) + j(50)Tan(2\pi \times 0.125)}{50 + j(75 - j30)Tan(2\pi \times 0.125)}$$

Calculando:

$$Z_{in}(0.125\lambda) = 31.2 - j16.7 = 35.4\langle -28^0 \rangle$$

Para el primer caso: $\ell = 0.3$

$$Z_{in}(0.125\lambda) = 50\Omega \frac{(75 - j30) + j(50)Tan(2\pi \times 0.3)}{50 + j(75 - j30)Tan(2\pi \times 0.3)}$$

Calculando:

$$Z_{in}(0.3\lambda) = 35.6 + j22.8 = 42.3\langle 33^0 \rangle$$

Como se aprecia claramente la impedancia de entrada varía en función de la longitud eléctrica de la línea.

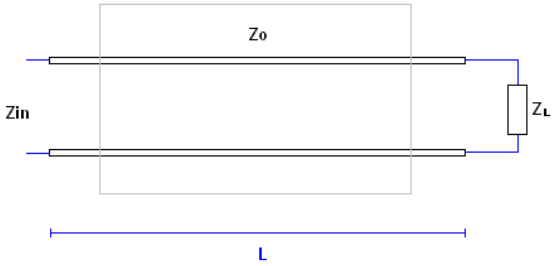
Impedancia de entrada normalizada

Al igual que en los medios abiertos, se acostumbra expresar la impedancia de entrada en forma normalizada, escogiendo como valor de normalización la impedancia de la línea de transmisión.

La impedancia normalizada es la razón entre la impedancia y la impedancia de normalización, es decir:

$$\widehat{Z_{in}} = \frac{Z_{in}}{Z_0}$$

Para el caso de una línea de longitud L terminada en una carga se tiene:



$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 Tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} L\right)}{Z_0 + jZ_L Tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} L\right)}$$

Normalizando con respecto a Z_0 se tiene:

$$\frac{Z_{in}}{Z_0} = \frac{\frac{Z_L}{Z_0} + j\frac{Z_0}{Z_0} Tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} L\right)}{\frac{Z_0}{Z_0} + j\frac{Z_L}{Z_0} Tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} L\right)}$$

Equivalente a:

$$\widehat{Z_{in}} = \frac{\widehat{Z_L} + jTan(2\pi\ell)}{1 + j\widehat{Z_L} Tan(2\pi\ell)}$$

Para recuperar la impedancia en ohmios, basta con multiplicar la impedancia normalizada por la impedancia de normalización.

Línea terminada en cortocircuito

Si la impedancia de carga es cero ($Z_L = 0$), las ecuaciones de los coeficientes de reflexión y transmisión quedan:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1 \qquad \tau = 1 + \Gamma = 0$$

Es decir, se presenta reflexión total y no existe onda transmitida.

La impedancia de entrada, sin embargo, da como resultado un valor dependiente de la longitud de la línea:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 Tan(2\pi \ell)}{Z_0 + jZ_L Tan(2\pi \ell)}\Bigg|_{Z_L \to 0}$$

$$Z_{in}\Big|_{Z_L \to 0} = jZ_0 Tan(2\pi \ell)$$

La impedancia normalizada:

$$\overset{\Lambda}{Z}_{in}\Big|_{Z_L \to 0} = jTan(2\pi \ell)$$

Cuando se grafica la impedancia normalizada en función de la longitud eléctrica se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 138.

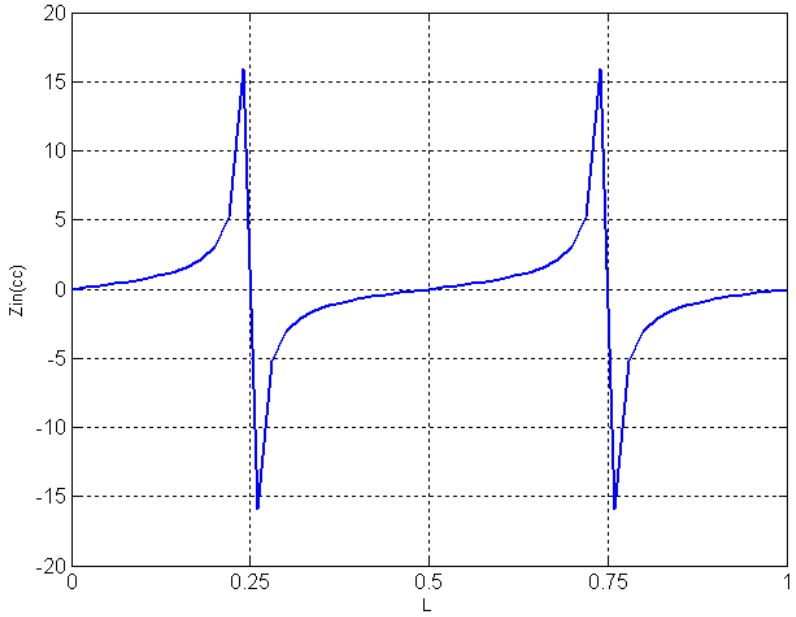


Figura 138. Impedancia de entrada normalizada para una línea terminada en corto-circuito

Como se observa claramente en la figura 138, la impedancia de entrada se repite cada 0.5λ y se hace indeterminada tendiendo a infinito en 0.25λ y 0.75λ.

En la zona entre 0 y 0.25λ, la impedancia normalizada se comporta como un inductor puro, es decir, tiene impedancia imaginaria pura positiva, mientras en la zona entre 0.25λ y 0.5λ, lo hace como un capacitor, impedancia imaginaria pura negativa.

Línea terminada en circuito abierto

Si la impedancia de carga es infinita ($Z_L \to \infty$), las ecuaciones de los coeficientes de reflexión y transmisión quedan:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 1 \qquad\qquad \tau = 1 + \Gamma = 2$$

Es decir, la onda transmitida tiene el doble de amplitud de la incidente y la onda reflejada tiene la misma amplitud de la reflejada. Este es un caso particular que se analizará en detalle más adelante.

La impedancia de entrada da como resultado un valor dependiente de la longitud de la línea:

$$Z_{in} = Z_0 \left. \frac{Z_L + jZ_0 Tan(2\pi\ell)}{Z_0 + jZ_L Tan(2\pi\ell)} \right|_{Z_L \to \infty}$$

$$Z_{in} = Z_0 \left. \frac{1 + j\dfrac{Z_0}{Z_L} Tan(2\pi\ell)}{\dfrac{Z_0}{Z_L} + jTan(2\pi\ell)} \right|_{Z_L \to \infty}$$

$$Z_{in}\big|_{Z_L \to \infty} = \frac{Z_0}{jTan(2\pi\ell)}$$

$$Z_{in}\big|_{Z_L \to \infty} = -jZ_0 Cot(2\pi\ell)$$

La impedancia normalizada:

$$\overset{\Lambda}{Z}_{in}\Big|_{Z_L \to \infty} = -jCot(2\pi\ell)$$

Cuando se grafica la impedancia normalizada en función de la longitud eléctrica se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 139.

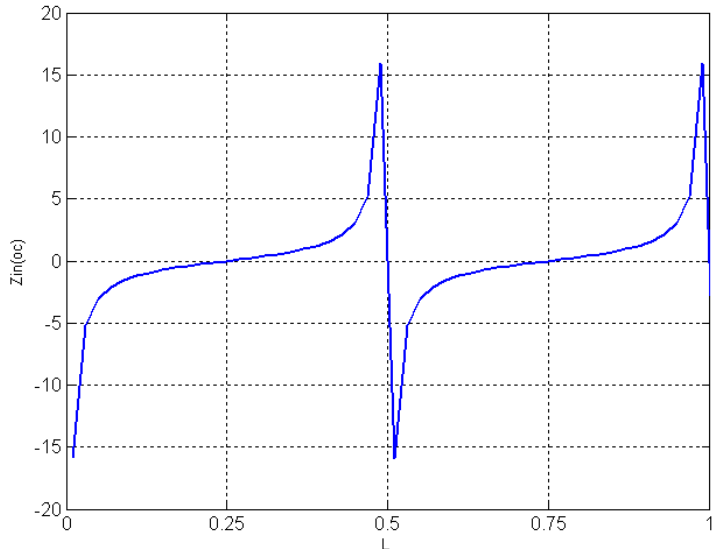


Figura 139. Impedancia de entrada normalizada para una línea terminada en circuito abierto

Como se observa claramente en la figura 139, la impedancia de entrada se repite cada 0.5λ y se hace indeterminada tendiendo a infinito en 0, 0.5λ y λ.

En la zona entre 0 y 0.25λ, la impedancia normalizada se comporta como un capacitor puro, es decir, tiene impedancia imaginaria pura negativa; mientras en la zona entre 0.25λ y 0.5λ lo hace como un inductor, impedancia imaginaria pura positiva.

Este comportamiento contrasta con el de la impedancia de entrada para la línea terminada en corto-circuito, en donde el comportamiento es igual, pero con un desplazamiento en distancia de 0.25λ, como se ilustra en la figura 140.

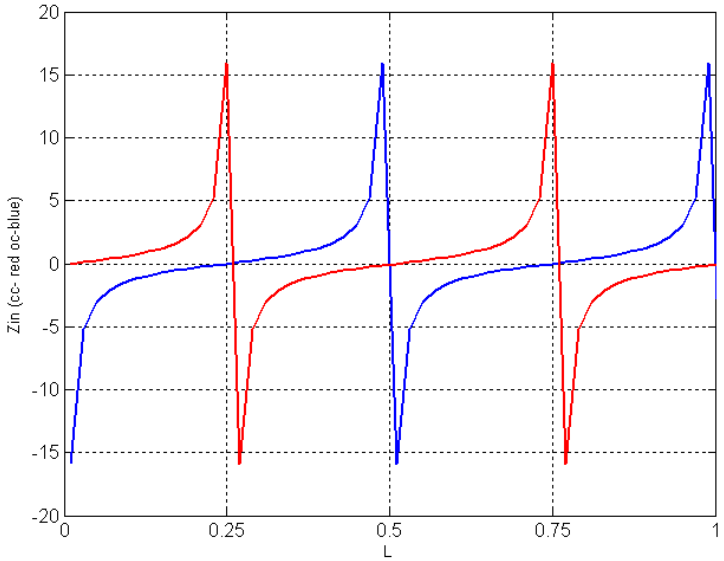


Figura 140. Comparativo entre la impedancia de entrada normalizada para una línea terminada en circuito abierto (azul) y una línea terminada en corto-circuito (rojo)

Línea bien acoplada

Cuando la impedancia de la línea y la de la carga son iguales, se presenta un caso especial en el cual no se ocurre onda reflejada. Los coeficientes de transmisión y reflexión quedan:

$$\Gamma = \left.\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right|_{Z_L = Z_0} = 0 \qquad \tau = 1 + \Gamma = 1$$

En este caso existe transmisión total, es decir que el total de la onda se propaga sin presentar reflexión.

Esta condición es ideal para maximizar la transmisión de potencia a la carga ya que no existe reflexión.

La impedancia de entrada, vista desde la entrada de la línea, queda:

$$Z_{in} = Z_0 \left.\frac{Z_L + jZ_0 Tan(2\pi \ell)}{Z_0 + jZ_L Tan(2\pi \ell)}\right|_{Z_L \to Z_0}$$

En este caso:

$$Z_{in} = Z_0$$

Independientemente de la longitud eléctrica de la línea.

La impedancia de entrada normalizada queda:

$$\widehat{Z_{in}} = \frac{Z_{in}}{Z_0} = 1$$

Máximos y mínimos de voltaje

Debido a la reflexión presente en una línea mal acoplada, la onda de voltaje total es la suma de las ondas incidente y reflejada:

$$V_{s1} = V_1^+ e^{-j\beta x} + V_1^- e^{j\beta x}$$

En términos del coeficiente de reflexión:

$$V_{s1} = V_1^+ e^{-j\beta x} + \Gamma V_1^+ e^{j\beta x}$$

Dado que el coeficiente de reflexión es un número complejo:

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}$$

Reemplazando:

$$V_{s1} = V_1^+ e^{-j\beta x} + |\Gamma| V_1^+ e^{j\beta x} e^{j\theta_\Gamma}$$

Se hace factor común del voltaje incidente:

$$V_{s1} = V_1^+ \left(e^{-j\beta x} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_\Gamma)} \right)$$

Se multiplica y divide por una misma cantidad sin alterar la ecuación:

$$V_{s1} = V_1^+ \left(e^{-j\beta x} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_\Gamma)} \right) \times e^{-j\frac{\theta_\Gamma}{2}} \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

$$V_{s1} = V_1^+ \left(e^{-j\beta x} e^{-j\frac{\theta_\Gamma}{2}} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_\Gamma)} e^{-j\frac{\theta_\Gamma}{2}} \right) \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Simplificando:

$$V_{s1} = V_1^+ \left(e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + |\Gamma| e^{j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} \right) \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Se puede agregar y restar un mismo término sin alterar la ecuación:

$$V_{s1} = V_1^+ \left(e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + |\Gamma| e^{j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + |\Gamma| e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} - |\Gamma| e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} \right) \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Reduciendo:

$$V_{s1} = V_1^+ \left[(1 - |\Gamma|) e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + |\Gamma| \left(e^{j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} \right) \right] \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Aplicando la identidad de Euler:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2Cos\theta$$

$$V_{s1} = V_1^+ \left[(1 - |\Gamma|) e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + 2|\Gamma| Cos\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2} \right) \right] \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Se observan claramente dos componentes de la señal de voltaje:

Una primera componente, da origen a una onda viajera de amplitud $(1 - |\Gamma|)V_1^+$, por su carácter complejo:

$$V_{s1}^+ = V_1^+ (1 - |\Gamma|) e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Una segunda, de valor real, simplemente multiplica al voltaje sin generar onda viajera:

$$V_{ss1} = 2V_1^+|\Gamma|Cos\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right) \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Esta segunda componente de amplitud $2|\Gamma|V_1^+$ se comporta como una onda estacionaria sobrepuesta a la onda viajera de amplitud $(1-|\Gamma|)V_1^+$.

En el espacio, las dos componentes se suman como se muestra en la figura 141.

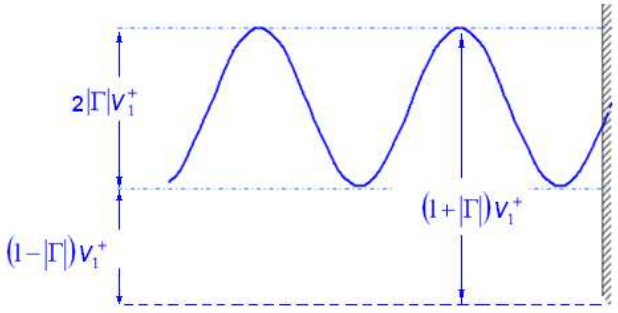


Figura 141. Sumatoria de amplitudes de voltaje viajero y estacionario en la línea de transmisión

Se aprecia claramente que existen puntos en los máximos de la onda estacionaria, donde el voltaje alcanza un valor máximo equivalente a:

$$V_{MAX} = (1+|\Gamma|)V_1^+$$

Y puntos donde la onda estacionaria se anula quedando solo la componente viajera. En este caso la amplitud del voltaje alcanza un valor mínimo.

$$V_{MIN} = (1-|\Gamma|)V_1^+$$

Los valores máximos de voltaje se encuentran en los máximos de la componente estacionaria, es decir, donde la función coseno alcanza los valores máximos; esto es en los múltiplos de π radianes:

$$\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2} = n\pi \quad n = 0,1,2$$

Despejando x:

$$x = \frac{n\pi}{\beta} - \frac{\theta_\Gamma}{2\beta} \quad n = 0,1,2$$

Reemplazando $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$x = \frac{n\pi}{2\pi}\lambda - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \quad n = 0,1,2$$

Simplificando:

$$x = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \;\; n = 0,1,2$$

Para encontrar los mínimos de voltaje, basta con encontrar los mínimos de la componente estacionaria. La función coseno se hace mínima en los múltiplos impares de π/2 de radian:

$$\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n = 0,1,2$$

Despejando x:

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_\Gamma}{2} \quad n = 0,1,2$$

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \quad n = 0,1,2$$

Relación de onda estacionaria

La relación entre el voltaje máximo y el voltaje mínimo dentro de la línea se denomina relación de onda estacionaria de voltaje VSWR.[32]

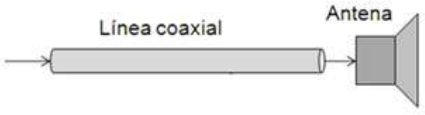
$$VSWR = \frac{V_{MAX}}{V_{MIN}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

Cuando se presenta reflexión total, la relación de onda estacionaria se hace infinita.

Ejemplo 94. Relación de onda estacionaria máximos y mínimos de voltaje.

Una línea de transmisión coaxial sin pérdidas, $Z_0 = 50\Omega$ termina en una antena tipo cuerno $Z_L = (75 - j30)\Omega$.

Calcule la relación de onda estacionaria y el voltaje incidente si el voltaje máximo medido sobre la línea es de $130V_{RMS}$. Calcule a qué distancia eléctrica desde la antena se encuentra el primer máximo y el primer mínimo.



Solución:

Se calcula el coeficiente de reflexión en magnitud y ángulo

[32] Voltage Standing Wave Ratio, por sus siglas en inglés.

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{75 - j30 - 50}{75 - j30 + 50}$$

$$\Gamma = \frac{25 - j30}{125 - j30}$$

$$\Gamma = 0.243 - 0.182i = 0.3\langle -37^0 \rangle$$

La relación de onda estacionaria:

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.3}{1 - 0.3} = \frac{1.3}{0.7} = 1.857$$

El voltaje máximo viene definido por:

$$V_{MAX} = (1 + |\Gamma|)V_1^+$$

Despejando:

$$V_1^+ = \frac{V_{MAX}}{1 + |\Gamma|} = \frac{130V_{RMS}}{1.3} = 100V_{RMS}$$

Para el primer máximo: $x = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \qquad n = 0$

$$\theta_\Gamma = -37^0 \times \frac{\pi\, rad}{180^0} = -0.646rad$$

$$x = (0)\frac{\lambda}{2} + \frac{0.646}{4\pi}\lambda = 0.05\lambda$$

Para el primer mínimo:

$$x = (2n + 1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi}\lambda \quad n = 0$$

Reemplazando:

$$x = \frac{\lambda}{4} + \frac{0.646}{4\pi}\lambda$$

$$x = 0.3\lambda$$

Potencia y pérdidas en líneas de transmisión

La potencia instantánea transmitida por una línea de transmisión terminada en una carga, está determinada por el producto del voltaje y la corriente que se propagan a lo largo de la línea. En el cálculo de potencia no solo se debe tomar en cuenta la impedancia propia de la línea, sino la resultante de la línea y la carga considerando la longitud eléctrica de la línea.

Se puede identificar una componente de potencia correspondiente al voltaje incidente, denominada potencia incidente.

$$P_1^+ = \frac{\left|V_{1\_RMS}^+\right|^2}{\left|Z_{eq}\right|} e^{-2\alpha x} Cos\left(\theta_{Zeq}\right)$$

En este caso, Z_{eq} es la impedancia equivalente del sistema línea-carga, expresada en magnitud y ángulo.

Una segunda componente de la potencia total es la potencia reflejada en la carga, ésta toma en cuenta el voltaje reflejado y la impedancia equivalente del sistema.

$$P_1^- = \frac{\left|V_{1\_RMS}^-\right|^2}{\left|Z_{eq}\right|} e^{-2\alpha x} Cos\left(\theta_{Zeq}\right)$$

En términos del coeficiente de reflexión:

$$P_1^- = \frac{\left|V_{1\_RMS}^+\right|^2}{\left|Z_{eq}\right|} \left|\Gamma\right|^2 e^{-2\alpha x} Cos\left(\theta_{Zeq}\right)$$

Finalmente, está la potencia transmitida a la carga que de acuerdo con la ley de conservación de energía debe ser la diferencia entre la potencia incidente y la potencia reflejada.

$$P_2^+ = \frac{\left|V_{1\_RMS}^+\right|^2}{\left|Z_{eq}\right|} \left(1 - \left|\Gamma\right|^2\right) e^{-2\alpha x} Cos\left(\theta_{Zeq}\right)$$

Al igual que en los medios abiertos, la constante de atenuación define la cantidad de potencia que se pierde por efecto Joule en el medio físico, es decir, la línea de transmisión.

Reflectancia y transmitancia

La reflectancia es el porcentaje de la potencia incidente que es reflejada por el sistema. Desde el punto de vista matemático es la relación expresada en porcentaje de la potencia reflejada y la potencia incidente:

$$R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = \left|\Gamma\right|^2$$

La transmitancia es la relación porcentual entre la potencia transmitida y la potencia incidente. Por ley de conservación de la energía, la suma de la reflectancia y la transmitancia debe ser igual a la unidad, es decir al 100%.

$$T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = 1 - \left|\Gamma\right|^2$$

Ejemplo 95. Potencia en líneas mal acopladas.

Una línea de transmisión con pérdidas de 0.03dB/m, $Z_0 = 50\Omega$, $f_v = 0.333$ se encuentra acoplando un generador $Z_g = 60\Omega$ con una antena $Z_L = (80 - j30)\Omega$ a una frecuencia de 100MHz.

¿Qué porcentaje se transmite de la línea a la antena? ¿Si la línea mide 1.3m, qué porcentaje de la potencia del generador se transmite a la línea? ¿Qué porcentaje se transmite en total, del generador a la antena?

Solución:

El coeficiente de reflexión entre antena y línea es:

$$\Gamma_{linea-Antena} = \frac{Z_{antena} - Z_{linea}}{Z_{antena} + Z_{linea}} = \frac{80 - j30 - 50}{80 - j30 + 50} = \frac{30 - j30}{130 - j30} = 0.32\angle -32^0$$

La transmitancia entre línea y antena es:

$$T_{linea-Antena} = 1 - \left|\Gamma\right|^2 = 1 - 0.32^2$$

El porcentaje de potencia transmitida de la línea a la antena es:

$$T_{linea-Antena} = 0.8976 = 89.8\%$$

La longitud de onda en la línea es:

$$\lambda = f_v \lambda_0 = 0.333 \times \frac{3 \times 10^8 m/s}{10^8 Hz} = 1m$$

La longitud eléctrica de la línea es por tanto:

$$\ell = \frac{x}{\lambda} = 1.3$$

La impedancia de entrada de la línea está determinada por:

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_2 + jZ_1 Tan(2\pi\ell)}{Z_1 + jZ_2 Tan(2\pi\ell)}$$

Reemplazando:

$$Z_{in} = 50\Omega \frac{(80 - j30)\Omega + j(50\Omega) Tan(2\pi \times 1.3)}{50\Omega + j(80 - j30)\Omega Tan(2\pi \times 1.3)}$$

$$Z_{in} = (33.5 + j22)\Omega$$

El coeficiente de reflexión entre línea y generador es:

$$\Gamma_{generador-linea} = \frac{Z_{in} - Z_g}{Z_{in} + Z_g} = \frac{(33.5 + j22)\Omega - 60}{(33.5 + j22)\Omega + 60}$$

$$\Gamma_{generador-linea} = -0.22 + j0.29 = 0.36\langle 123^0$$

La transmitancia entre generador y línea queda:

$$\frac{P_{transmitida}}{P_{incidente}} = \left(1 - \left|\Gamma_{generador-línea}\right|^2\right) = 1 - 0.36^2 = 0.872 = 87.2\%$$

La línea tiene pérdidas, las cuales deben ser consideradas, por lo tanto:

$$\alpha(Np/m) = \frac{\alpha(dB/m)}{20\log(e)} = 0.00345$$

De la ecuación del vector de Poynting entre línea y antena:

$$\frac{P_{transmitida}}{P_{incidente}} = \left(1 - \left|\Gamma_{línea-antena}\right|^2\right) e^{-2\alpha x} = \left(1 - 0.32^2\right) e^{-2 \times 0.0345 \times 1.3} = 0.82 = 82\%$$

Es decir que el 82% de la potencia que se transmite a la línea, efectivamente llega a la antena.

El porcentaje de potencia total transmitida será:

$$\left.\frac{P_{transmitida}}{P_{incidente}}\right|_{Total} = \frac{P_{transmitida-línea}}{P_{incidente-generador}} \times \frac{P_{transmitida-antena}}{P_{incidente-línea}} = \frac{P_{transmitida-antena}}{P_{incidente-generador}} = 0.872 \times 0.82 = 0.7156 \cong 72\%$$

De la potencia emitida por el generador, solo el 72% se transmite a la antena.

El 87.2% pasa del generador a la línea, es decir que el 12.8% se retorna al generador, y la diferencia entre 87.2% y 72% que efectivamente pasa a la antena, se pierde por efecto Joule en la línea de transmisión (15.2%).

Transformador de impedancias λ/4

La expresión de la impedancia de entrada en una línea de transmisión terminada en una carga está definida por:

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_2 + jZ_1 Tan(2\pi\ell)}{Z_1 + jZ_2 Tan(2\pi\ell)}$$

Cuando la longitud eléctrica de la línea es igual a un cuarto de la longitud de onda, $\left(\lambda/4\right)$, la función tangente se hace indeterminada tendiendo a infinito.

En este caso, la impedancia de entrada queda definida por:

$$Z_{in} = Z_1 \left.\frac{\frac{Z_2}{jTan(2\pi\ell)} + Z_1}{\frac{Z_1}{jTan(2\pi\ell)} + Z_2}\right|_{\ell \to 0.25}$$

$$Z_{in} = \frac{Z_1^2}{Z_2}$$

Si se desea igualar la impedancia de entrada a la impedancia del generador para obtener máxima transferencia de potencia, se obtiene:

$$Z_g = \frac{Z_1^2}{Z_2}$$

Si la impedancia de carga es diferente de la impedancia del generador, se puede usar una línea de longitud 0.25λ que permita igualar estas dos impedancias. La impedancia de la línea deseada para este efecto sería:

$$Z_1 = \sqrt{Z_g Z_2}$$

Ejemplo 96. Transformador λ/4.

Un generador $Z_g = 60\Omega$ se va a conectar con una antena $Z_L = 50\Omega$. ¿Qué impedancia deberá tener una línea de transmisión λ/4 que permita hacer el acople reduciendo al mínimo las pérdidas por reflexión?

Solución:

Para acoplar entre generador y antena se usa un tramo de línea como transformador λ/4 con una impedancia de:

$$Z_x = \sqrt{60\Omega \times 50\Omega} = 54.8\Omega \cong 55\Omega$$

De esta forma se reduce a cero el coeficiente de reflexión y la potencia transmitida solo queda afectada por las pérdidas en la línea.

Métodos gráficos – La carta de Smith

La carta de Smith es la representación gráfica, en el plano Gaussiano del coeficiente de reflexión, de la resistencia y la reactancia normalizadas. Como herramienta gráfica, la carta de Smith permite obtener algunos parámetros de las líneas de transmisión y resolver problemas de adaptación de impedancias, evitando las operaciones con números complejos.

Construcción

El coeficiente de reflexión en la carga, para una línea terminada en una impedancia Z_L se obtiene como:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

En términos de la impedancia de carga normalizada:

$$\Gamma = \frac{\widehat{Z_L} - 1}{\widehat{Z_L} + 1}$$

La impedancia de carga normalizada se puede expresar como un número complejo:

$$\Gamma = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1}$$

Multiplicando por el complejo conjugado:

$$\Gamma = \frac{(r - 1 + jx)(r + 1 - jx)}{(r + 1)^2 + x^2}$$

$$\Gamma = \frac{r^2 - 1 + x^2 + j2x}{(r + 1)^2 + x^2}$$

Separando las componentes real e imaginaria se tiene:

$$\Gamma = \frac{r^2 - 1 + x^2}{(r + 1)^2 + x^2} + j\frac{2x}{(r + 1)^2 + x^2}$$

El coeficiente de reflexión tiene parte real e imaginaria:

$$\Gamma_\mathrm{r} + j\Gamma_\mathrm{i} = \frac{r^2 - 1 + x^2}{(r + 1)^2 + x^2} + j\frac{2x}{(r + 1)^2 + x^2}$$

Donde se obtiene:

$$\Gamma_\mathrm{r} = \frac{r^2 - 1 + x^2}{(r + 1)^2 + x^2}$$

$$\Gamma_\mathrm{i} = \frac{2x}{(r + 1)^2 + x^2}$$

De la segunda ecuación se tiene:

$$x^2\Gamma_\mathrm{i} + (r + 1)^2\Gamma_\mathrm{i} = 2x$$

$$[x^2\Gamma_\mathrm{i} + (r + 1)^2\Gamma_\mathrm{i}]^2 = 4x^2$$

De la primera ecuación:

$$[(r + 1)^2 + x^2]\Gamma_\mathrm{r} = r^2 - 1 + x^2$$

Despejando:

$$(r+1)^2\Gamma_r + 1 - r^2 = x^2(1-\Gamma_r)$$

De donde:

$$x^2 = \frac{(r+1)^2\Gamma_r + 1 - r^2}{1-\Gamma_r}$$

Reemplazando:

$$\left[\frac{(r+1)^2\Gamma_r + 1 - r^2}{1-\Gamma_r} \times \Gamma_i + (r+1)^2\Gamma_i\right]^2 = 4\frac{(r+1)^2\Gamma_r + 1 - r^2}{1-\Gamma_r}$$

Al reducir la expresión queda:

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$

Si se elimina r y se pone en función de x:

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

De la primera ecuación, se deduce que el lugar geométrico de los puntos (Γ_r, Γ_i), en el plano de Gauss, es una circunferencia, cuyo centro se encuentra sobre el eje real, y el radio varía dependiendo de r. Se tabula para obtener centro y radio en función de r:

r	X_0	Radio
0	0	1
1	½	½
3	3/4	1/4
4	4/5	1/5
9	9/10	1/10

Los círculos resultantes se grafican en la figura 142.

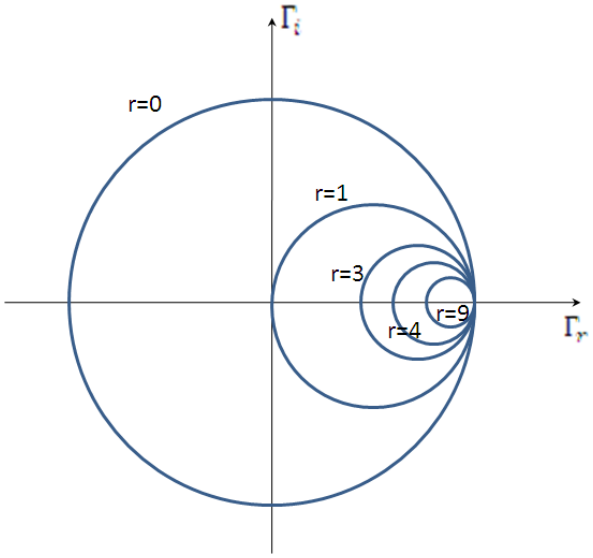


Figura 142. Círculos del lugar geométrico para el coeficiente de reflexión Γ en función de r

De la ecuación en función de x, se tiene:

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

En este caso, el lugar geométrico de los puntos (Γ_r, Γ_i), en el plano de Gauss, es también una circunferencia, pero el centro está desplazado sobre el eje real; una unidad, la coordenada y del centro y el radio de la circunferencia varían dependiendo de x. Se tabula para obtener centro y radio en función de x:

x	Y_0	Radio
1	1	1
2	1/2	1/2
4	1/4	1/4
10	1/10	1/10

Para valores de x negativos, se invierte la posición del centro, pero el radio no cambia:

En la figura 143, se muestran los círculos que se obtienen para el coeficiente de reflexión en diferentes valores de x.

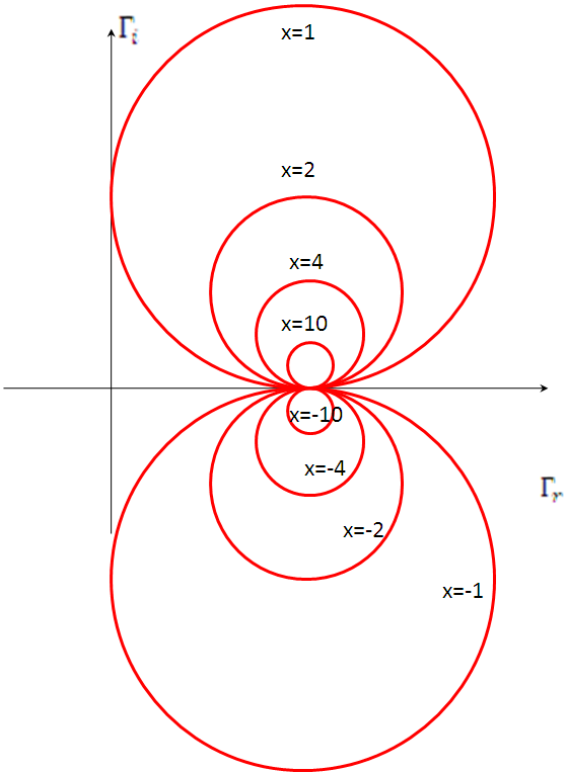


Figura 143. Círculos del lugar geométrico para el coeficiente de reflexión Γ en función de x

Cuando se superponen los dos gráficos se obtiene un lugar geométrico para el coeficiente de reflexión en función de los dos parámetros r y x, como se muestra en la figura 144. Este lugar geométrico recibe el nombre de carta de Smith.

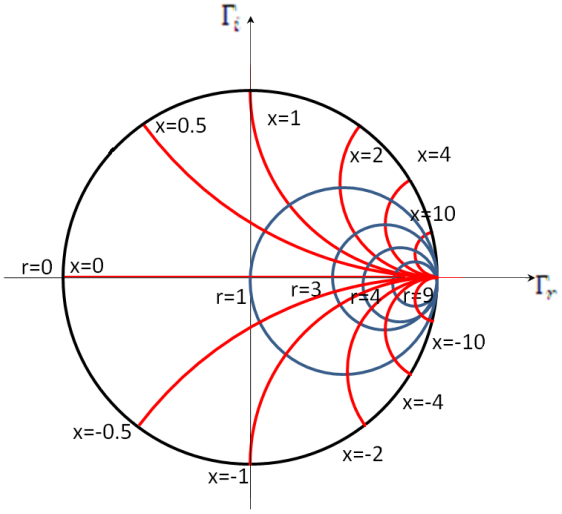


Figura 144. Carta de Smith para el coeficiente Γ en función de r y x

La carta de Smith, completa, se muestra en la figura 145.

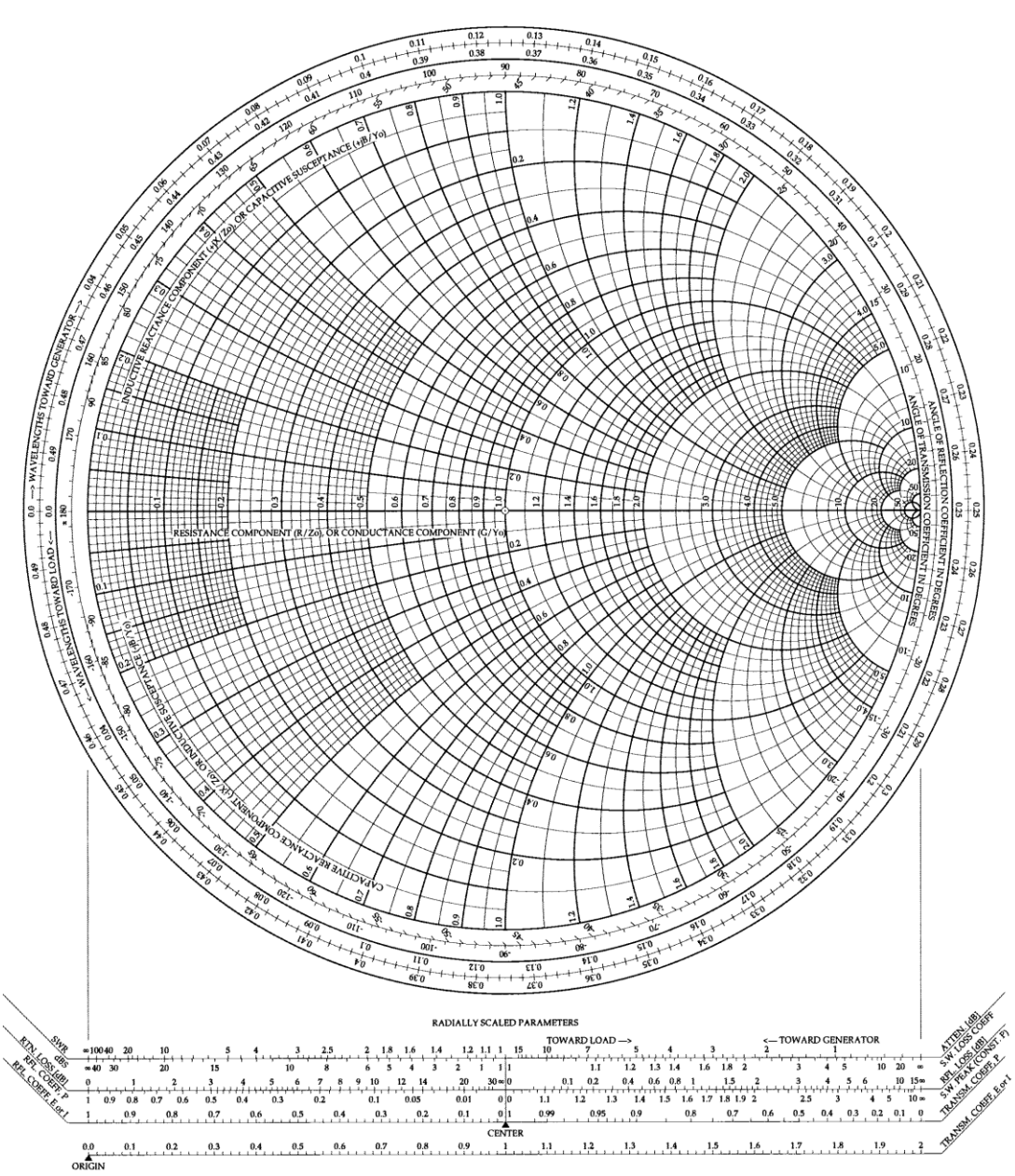

The Smith Chart
Electromagnetismo – Universidad Pontificia Javeriana
RESISTANCE COMPONENT (R/Zo), OR CONDUCTANCE COMPONENT (G/Yo)
INDUCTIVE REACTANCE COMPONENT (+jX/Zo), OR CAPACITIVE SUSCEPTANCE (+jB/Yo)
CAPACITIVE REACTANCE COMPONENT (-jX/Zo), OR INDUCTIVE SUSCEPTANCE (-jB/Yo)
ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES
ANGLE OF TRANSMISSION COEFFICIENT IN DEGREES
WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR
WAVELENGTHS TOWARD LOAD
RADIALLY SCALED PARAMETERS
TOWARD LOAD
TOWARD GENERATOR
CENTER
ORIGIN

Figura 145. Carta de Smith normalizada

En la carta de Smith, se ubican sobre las circunferencias de r y x los valores de la impedancia normalizada. La distancia entre este punto y el centro, en una circunferencia normalizada (radio unitario) constituye la magnitud el coeficiente de reflexión.

El ángulo que se forma entre el vector que une el punto con el centro de la Carta constituye el ángulo de dicho coeficiente, como se muestra en la figura 146.

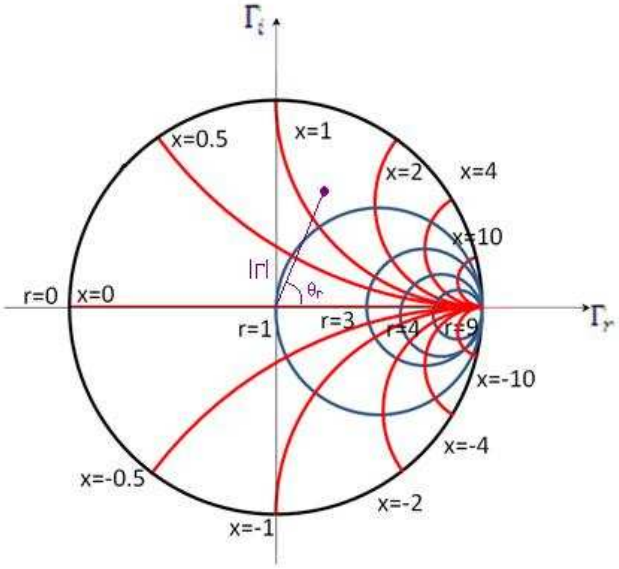


Figura 146. Cálculo del coeficiente de reflexión usando la carta de Smith

Cálculo de la impedancia de entrada de una línea mal acoplada

La circunferencia generada rotando el vector Γ, sobre el centro de la Carta, define el valor de la impedancia de entrada normalizada para diferentes valores de longitud de línea ℓ , como se muestra en la figura 147.

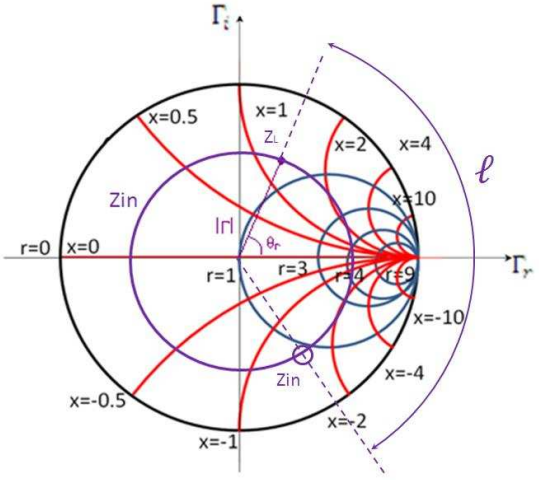


Figura 147. Medición de la impedancia de entrada usando la carta de Smith

Dado que la impedancia de entrada se repite cada 0.5λ, un giro completo dentro de la carta de Smith es un recorrido igual a esta distancia eléctrica. Un medio giro equivale a 0.25λ, como se muestra en la figura 148.

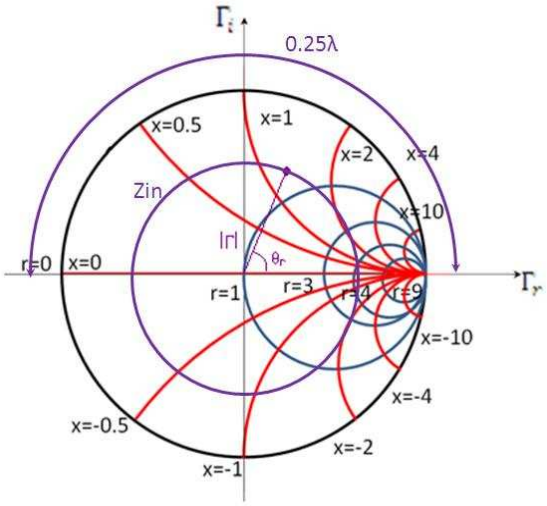


Figura 148. Transformador λ/4 usando la carta de Smith

Parámetros de transmisión

La carta de Smith, además, permite obtener parámetros como el coeficiente de transmisión, y la relación de onda estacionaria.

Para el coeficiente de transmisión, basta recordar que por definición, el coeficiente de transmisión está determinado por:

$$\tau = 1 + \Gamma$$

Lo que equivale a sumar una unidad sobre el eje real al vector Γ. Sobre la Carta, esto se puede hacer directamente, ya que se supone que la circunferencia máxima de la carta de Smith es unitaria, por lo que el coeficiente de transmisión se puede obtener como se muestra en la figura 149.

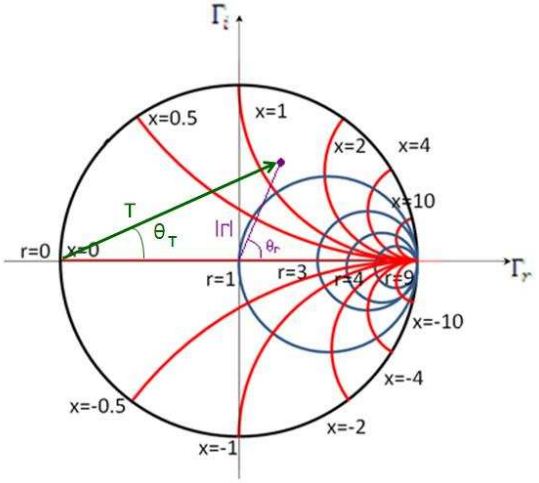


Figura 149. Coeficiente de transmisión usando la carta de Smith

Adicionalmente, de la ecuación del coeficiente de reflexión en términos de la impedancia normalizada se puede obtener:

$$\Gamma = \frac{\widehat{Z_L} - 1}{\widehat{Z_L} + 1}$$

Despejando la impedancia normalizada:

$$\widehat{Z_L} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

Comparando con la ecuación de la ROE:

$$ROE = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

Se concluye que la ROE es igual a la impedancia normalizada cuando el ángulo de Γ es cero.

Esto ocurre dentro de la carta de Smith, en el punto donde la circunferencia de la impedancia corta el semieje real negativo. Como se muestra en la figura 150.

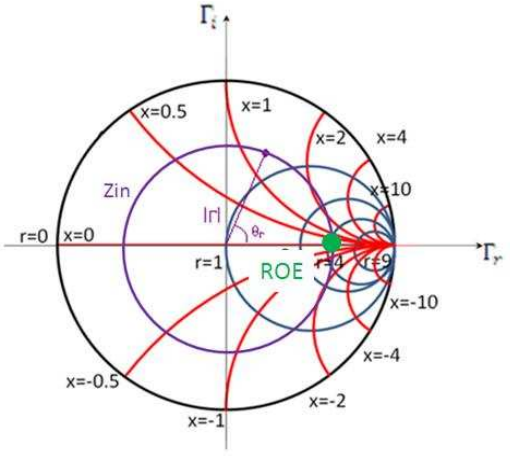


Figura 150. Cálculo de la ROE usando la carta de Smith

Ejemplo 97. Parámetros de transmisión – Carta de Smith.

Se conecta una antena de Z_L=(45-j30)Ω a una línea coaxial LC Zo=75Ω. Utilice la carta de Smith; calcular el coeficiente de reflexión (magnitud y ángulo), el coeficiente de transmisión, la VSWR y la impedancia de entrada para una línea 0.12λ.

Solución:

La impedancia de carga normalizada es:

$$\widehat{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{(45 - j30)\Omega}{75\Omega} = 0.6 - j0.4$$

Se busca la intersección de la circunferencia $r = 0.6$ con la circunferencia $x = -0.4$, que se encuentra en la parte inferior de la Carta. Como se muestra en la figura 151.

Se toma la distancia al centro y se divide por el radio de la Carta (r) para normalizar:

$$|\Gamma| = 0.343$$

Se mide el ángulo θ_Γ como se muestra en la figura 151.

$$\theta_\Gamma = -121^0$$

Se toma la distancia desde el punto de impedancia normalizada al extremo izquierdo de la Carta, como se muestra en la figura 151. Se divide por el radio de la Carta (r) para normalizar.

$$|\tau| = 0.875$$

Se mide el ángulo θ_Γ como se muestra en la figura 151.

$$\theta_\Gamma = -20^0$$

Para el cálculo de la SWR (ROE), se traza el círculo de impedancia de entrada y se busca la intersección con el eje real positivo.

$$SWR = 2.05$$

Finalmente, para el cálculo de la impedancia de entrada en una línea específica, se toma el punto de partida de la intersección de la prolongación del vector Γ, con la circunferencia máxima, obteniendo un valor de 0.416λ, tomada desde el punto $r = 0, x = 0$.

A esta longitud se le suma la longitud eléctrica de la línea:

$$\ell = 0.418\lambda + 0.12\lambda = 0.538\lambda$$

Debido a que una distancia de 0.5λ es una vuelta completa a la Carta, se descuentan los múltiplos enteros de 0.5λ del valor obtenido, en este caso:

$$\ell_{eq} = 0.538\lambda - 0.5\lambda = 0.038\lambda$$

Se ubica este punto sobre la circunferencia máxima y se proyecta sobre el círculo de impedancia. La proyección da como resultado la impedancia de entrada para la distancia eléctrica definida, como se muestra en la figura 151.

$$\widehat{Z_{in}} = 0.5 + j0.18$$

Para hallar el valor de la impedancia real, se multiplica por el valor de normalización:

$$Z_{in} = \widehat{Z_{in}} \times Z_0 = (0.5 + j0.18) \times 75\Omega = (37.5 + \text{j}13)\Omega$$

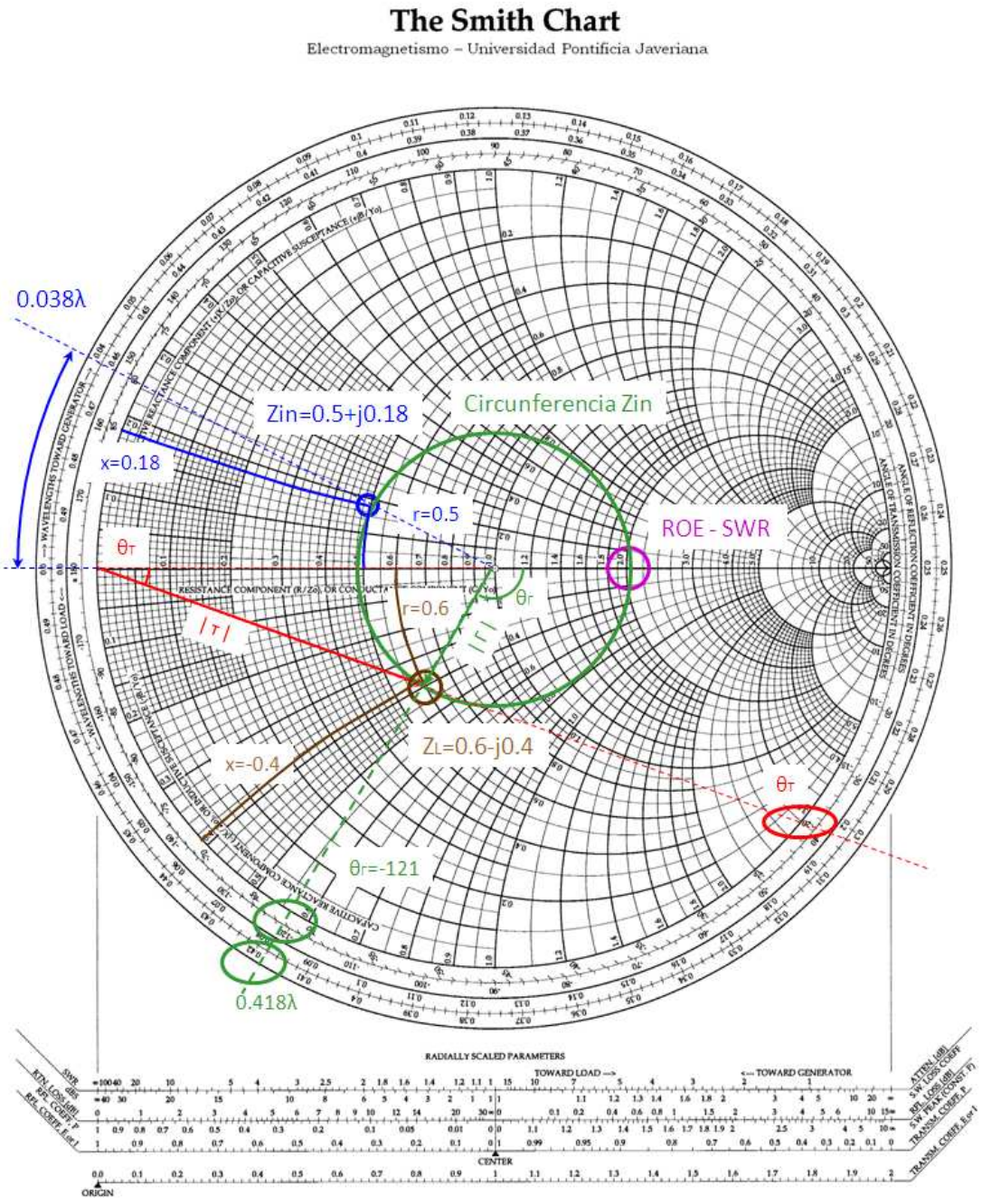


Figura 151. Parámetros de transmisión usando la carta de Smith. Ejemplo 97

Diagrama de admitancia

La expresión para la impedancia de entrada normalizada es:

$$\widehat{Z_{in}} = \frac{\widehat{Z_L} + jTan(2\pi\ell)}{1 + j\widehat{Z_L}Tan(2\pi\ell)}$$

Cuando la longitud eléctrica de la línea se hace cercana a 0.25λ, el valor de la función tangente tiende a infinito, por lo que la impedancia de entrada se hace igual a:

$$\widehat{Z_{in}} = \frac{1}{\widehat{Z_L}}$$

El inverso de la impedancia de carga normalizada es una admitancia, llamada admitancia normalizada:

$$\widehat{Z_{in}} = \frac{1}{Z_L/Z_0}$$

En términos de admitancia:

$$\widehat{Z_{in}} = \frac{1/Z_L}{1/Z_0} = \frac{Y_L}{Y_0} = \widehat{Y_L}$$

Lo cual significa que en la carta de Smith se puede obtener la admitancia con base en la impedancia, con un simple giro de 0.25λ, equivalente a 180º, como se muestra en la figura 152.

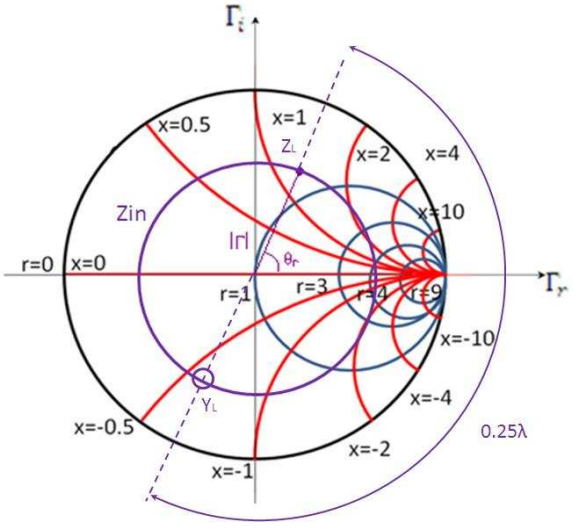


Figura 152. Obtención de la admitancia de entrada con base en la carta de Smith

Ejemplo 98. Cálculo de admitancias – Carta de Smith.

Se conecta una antena de Z_L=(80-j30)Ω a una línea LC Zo=50Ω. Utilice la carta de Smith para obtener la admitancia de la carga y la admitancia de entrada para una línea de 0.1λ.

Solución:

La impedancia de carga normalizada es:

$$\widehat{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{(80 - j30)\Omega}{50\Omega} = 1.6 - j0.6$$

Se busca la intersección de la circunferencia $r = 1.6$ con la circunferencia $x = -0.6$, que se encuentra en la parte inferior de la Carta. Como se muestra en la figura 153.

Se traza el círculo de impedancia y sobre el mismo se encuentra el punto diametralmente opuesto al punto de la impedancia de entrada (180º = 0.25λ).

Las coordenadas de ese punto corresponden a:

$$\widehat{Y_L} = 0.55 + j0.2$$

La admitancia de la línea de transmisión es:

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{50\Omega} = 0.02Sm = 20mSm$$

La admitancia de la carga es:

$$Y_L = \widehat{Y_L} \times Y_0 = (0.55 + j0.2) \times 20mSm = (11 + j4.1)mSm$$

Para obtener la admitancia de entrada, se busca la intersección del vector de admitancia de carga, con la circunferencia máxima y a partir de ese punto se agrega una longitud igual a la longitud de la línea.

Se proyecta el punto sobre el círculo de admitancia y se encuentra el valor de la intersección, como se muestra en la figura 153.

El valor de la intersección corresponde a las coordenadas:

$$\widehat{Y_{in}} = 0.95 + j0.65$$

Se obtiene el valor en siemens.

$$Y_{in} = \widehat{Y_{in}} \times Y_0 = (0.95 + j0.65) \times 20mSm = (19 + j13)mSm$$

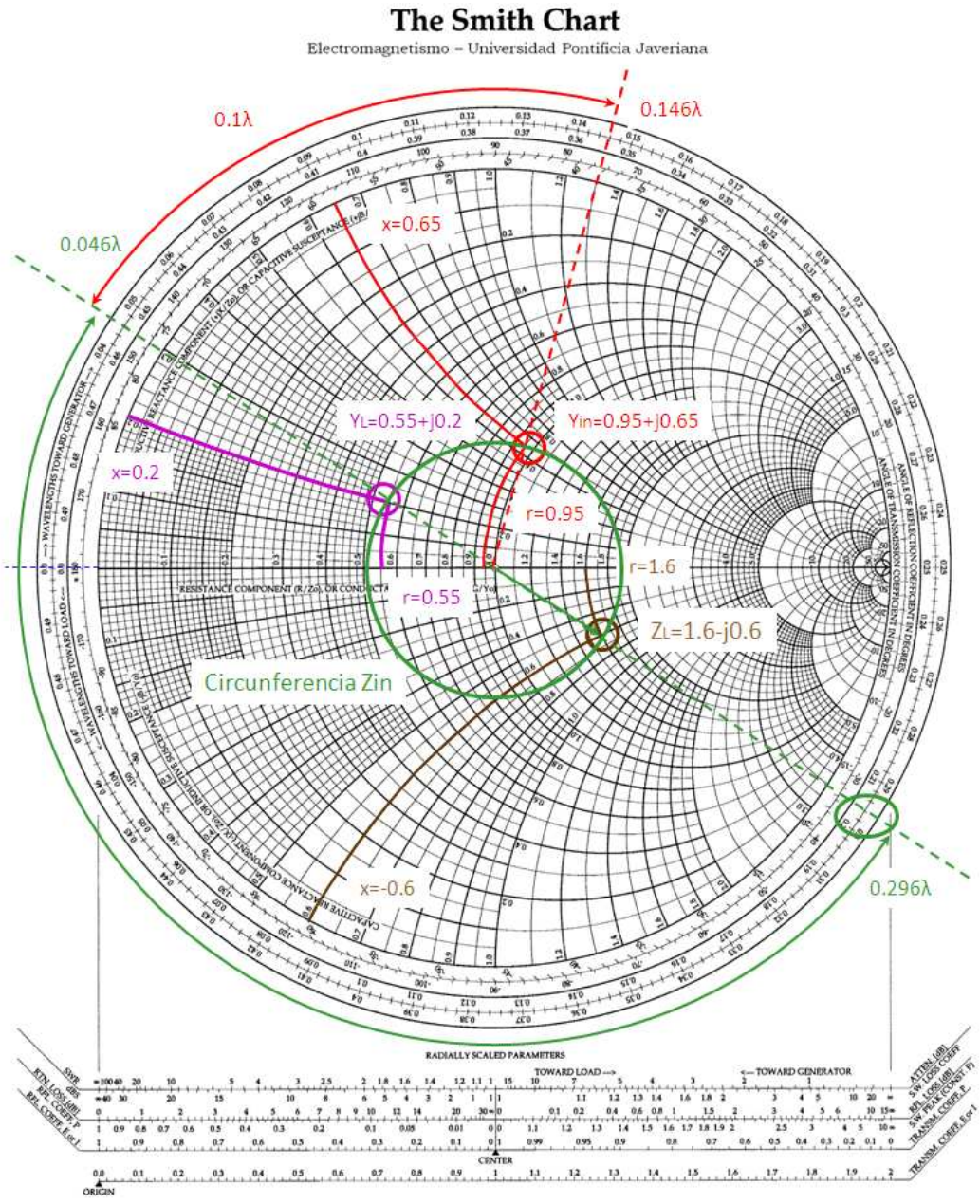


Figura 153. Cálculo de admitancias – carta de Smith. Ejemplo 98

Líneas terminadas en cortocircuito o en circuito abierto

Para una línea terminada en cortocircuito, la impedancia de la carga, se encuentra localizada en la intersección de las circunferencias $r = 0$ $x = 0$ que corresponde al punto extremo izquierdo de la Carta, como se muestra en la figura 154.

La admitancia de la carga es infinita, ya que por definición la admitancia es el inverso de la impedancia, y ésta es cero.

En la carta de Smith, la admitancia de cortocircuito se encuentra situada en un punto diametralmente opuesto al de la impedancia, es decir: $r \to \infty \; x \to \infty$

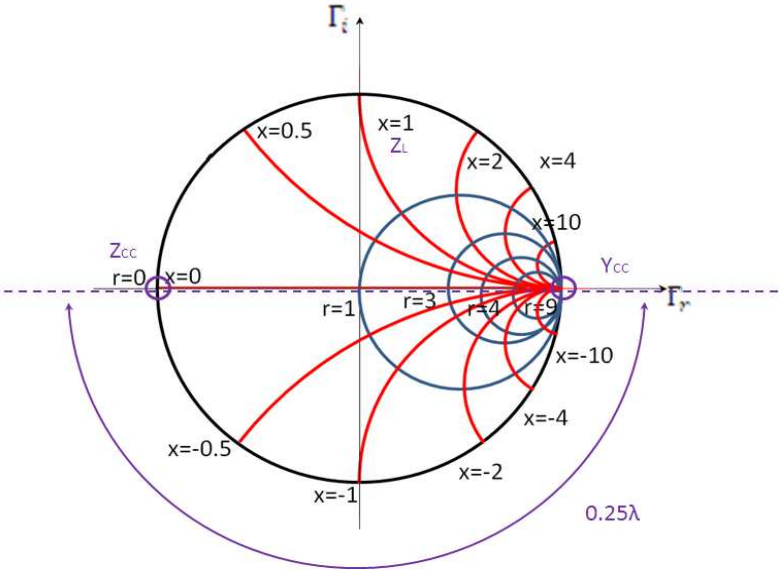


Figura 154. Admitancia e impedancia de una línea en corto-circuito

Con la línea terminada en circuito abierto ocurre exactamente lo contrario. La impedancia es infinita, lo cual indica que la admitancia es cero.

Por lo tanto, para una línea en circuito abierto, la impedancia estará en el extremo derecho y la admitancia en el punto diametralmente opuesto, como se muestra en la figura 157.

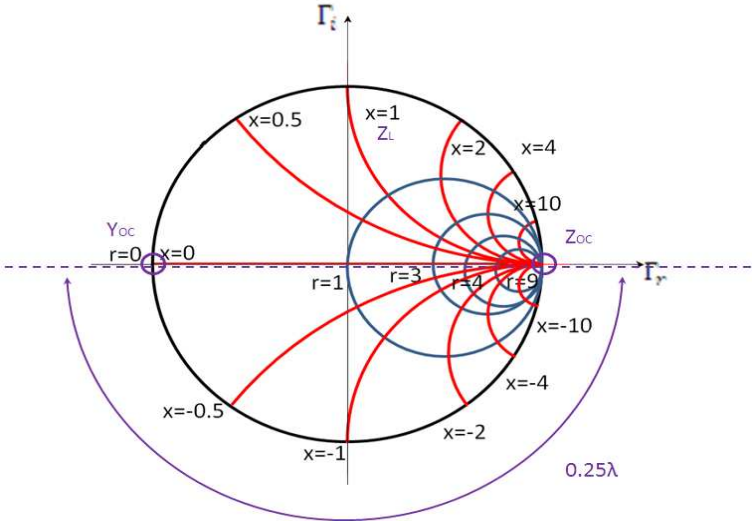


Figura 155. Admitancia e impedancia de una línea en circuito abierto

Dado que la impedancia de una línea en cortocircuito no tiene componente real, para calcular la impedancia o la admitancia de entrada, el círculo de impedancia coincide con la circunferencia máxima de la Carta $r = 0$.

Ejemplo 99. Admitancia de líneas en corto circuito o circuito abierto – Carta de Smith.

Calcule la admitancia de una línea de 0.2λ con una impedancia intrínseca de 50Ω, terminada en cortocircuito.

Calcule la admitancia de la misma línea si se encuentra terminada en circuito abierto.

Solución:

Como se muestra en la figura 155. Se parte de la admitancia de una línea en cortocircuito y se hace un desplazamiento de 0.2λ por la circunferencia máxima de la Carta. Se obtiene un valor para la admitancia de:

$$\widehat{Y_{in}} = -j0.32$$

La admitancia base de la línea es:

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{50\Omega} = 0.02Sm = 20mSm$$

Por lo que la admitancia en siemens queda:

$$Y_{in} = \widehat{Y_{in}} \times Y_0 = (-j0.32) \times 20mSm = -j6.4mSm$$

Si se calcula la impedancia de entrada se tiene:

$$Z_{in} = \frac{1}{Y_{in}} = \frac{1}{-j6.4 \times 10^{-3}Sm} = j156.3\Omega$$

Teóricamente, la impedancia de una línea en cortocircuito viene dada por:

$$Z_{in} = jZ_0Tan(2\pi\ell)$$

Reemplazando se obtiene:

$$Z_{in} = j50\Omega Tan(2\pi \times 0.2) = j156.8\Omega$$

Como se aprecia claramente, el error es inferior a 1Ω.

Para el caso de la línea en circuito abierto, se parte del extremo izquierdo de la Carta que es la admitancia de circuito abierto y se hace un desplazamiento de 0.2λ por la circunferencia máxima de la Carta. Se obtiene un valor para la admitancia de:

$$\widehat{Y_{in}} = j3.15$$

Por lo que la admitancia en siemens queda:

$$Y_{in} = \widehat{Y_{in}} \times Y_0 = (j3.15) \times 20mSm = j63mSm$$

Si se calcula la impedancia de entrada se tiene:

$$Z_{in} = \frac{1}{Y_{in}} = \frac{1}{j63 \times 10^{-3} Sm} = -j15.9\Omega$$

Teóricamente, la impedancia de una línea en circuito abierto viene dada por:

$$Z_{in} = -jZ_0 Cot(2\pi\ell)$$

$$Z_{in} = -j50\Omega Cot(2\pi \times 0.2) = -j16.2\Omega$$

Nuevamente, el error es inferior a 1Ω.

Se aprecia claramente que los resultados obtenidos analíticamente y por método gráfico difieren muy poco.

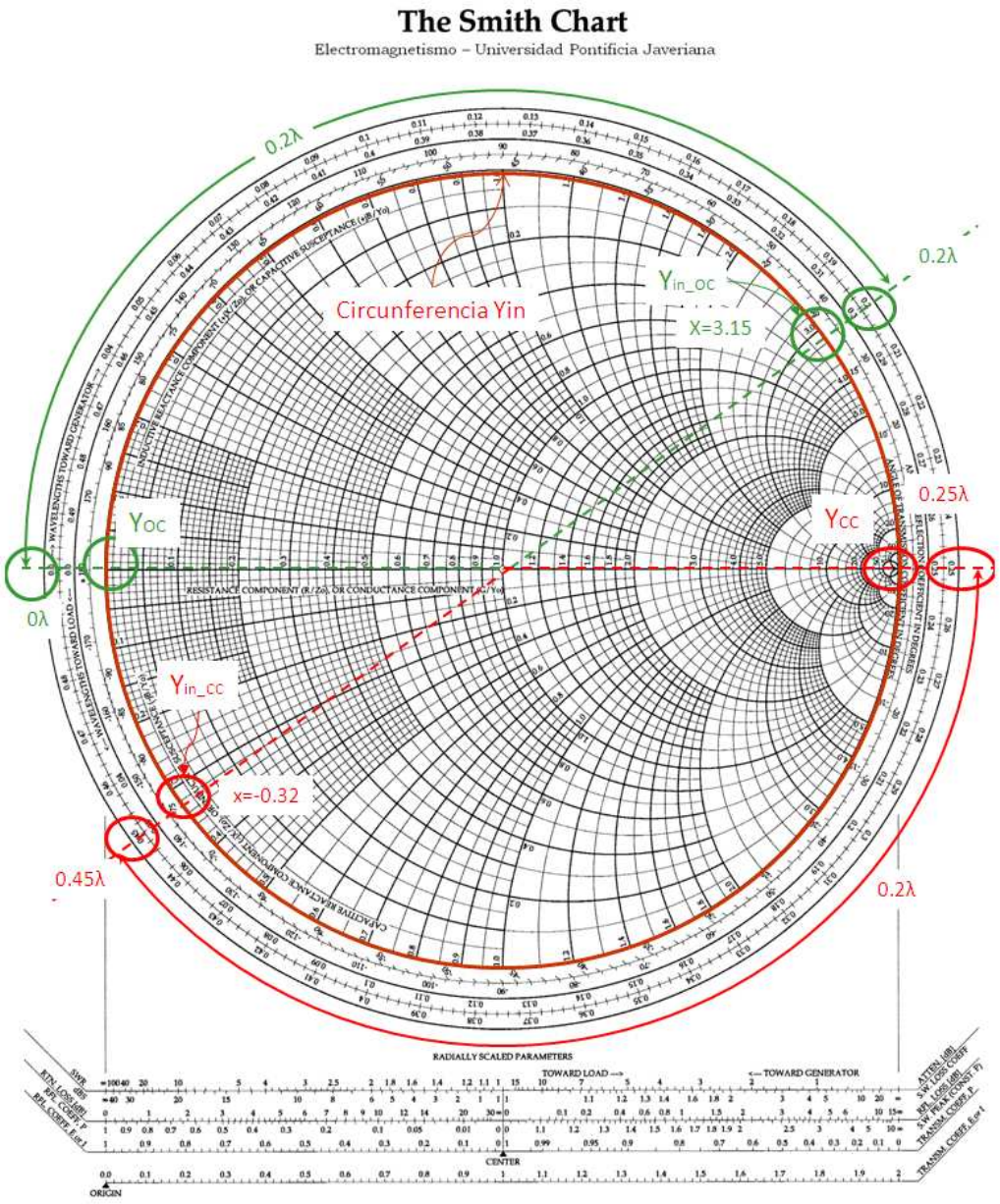


Figura 156. Admitancia e impedancia de una línea en corto-circuito o circuito abierto. Ejemplo 99

Cálculo de acoples reactivos usando carta de Smith

El diagrama de admitancia permite realizar una aproximación que en forma analítica resulta de gran complejidad dado el manejo que debe hacerse de los números complejos.

Cuando se observa la circunferencia de admitancia, se encuentra que existen al menos dos puntos en los cuales se cruza la circunferencia $r = 1$. Como se observa en la figura 157.

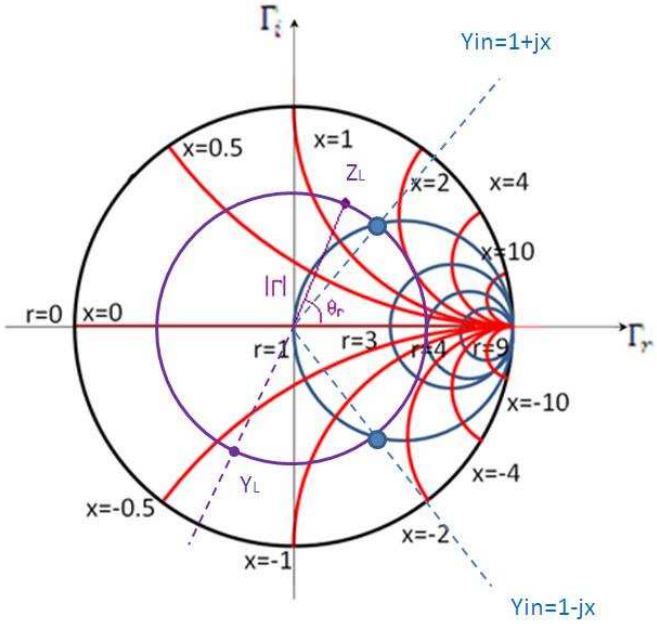


Figura 157. Intersección de la circunferencia de admitancia con el círculo r=1

Estas intersecciones ocurren dentro de una distancia siempre inferior a 0.5λ, y en ellos la admitancia de entrada tiene por valor:

$$\widehat{Y_{in}} = 1 \pm jx$$

Si se puede conectar una admitancia reactiva pura en estos puntos, cuyo valor sea el inverso aditivo de la componente imaginaria de la admitancia de entrada, se puede obtener una admitancia equivalente igual a la unidad.

Esta admitancia a conectar cumple el papel de admitancia de compensación, con lo cual al ser la admitancia total igual a la unidad, la impedancia equivalente también sería igual a la unidad y, por lo tanto, el coeficiente de reflexión se hace cero. La admitancia de compensación o acople, se conecta como se muestra en la figura 158.

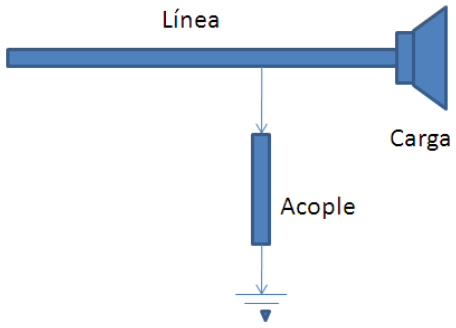


Figura 158. Conexión de un acople reactivo para minimizar Γ

El punto en el cual se conecta la admitancia de compensación se escoge con base en la carta de Smith, entre una de dos posibilidades d_{11} o d_{12}, que corresponden a las dos intersecciones con el círculo $r = 1$, según se muestra en la figura 159.

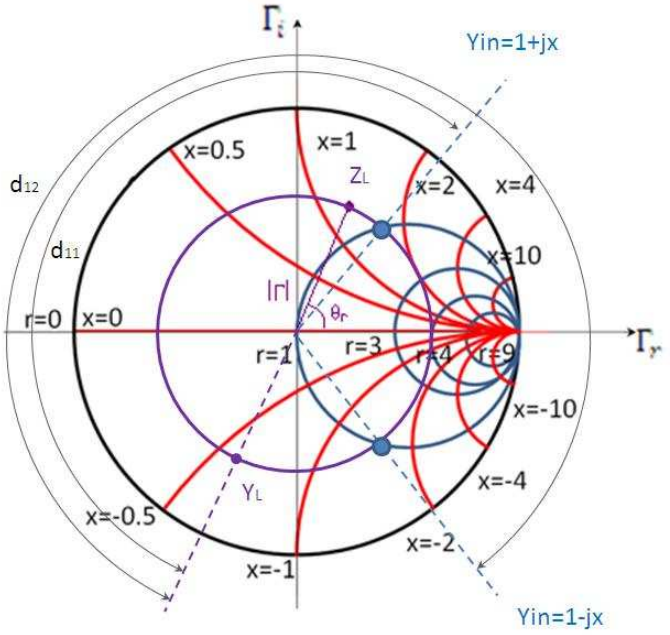


Figura 159. Distancias de referencia para ubicación de la admitancia de compensación

Ejemplo 100. Cálculo de distancias para conexión de acoples – Carta de Smith.

Se conecta una antena de Z_L=(60+j45)Ω a una línea LC Zo=75Ω. Utilice la carta de Smith para obtener la admitancia de la carga y la distancia en la cual se debe conectar una admitancia de compensación para llevar la admitancia de entrada a la unidad.

Calcule el valor de la admitancia a conectar en siemens y la impedancia equivalente en ohmios.

Solución:

La impedancia de carga normalizada es:

$$\widehat{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{(60 + j45)\Omega}{75\Omega} = 0.8 + j0.6$$

En la carta de Smith se obtiene una admitancia equivalente de carga de:

$$\widehat{Y_L} = 0.8 - j0.6$$

La intersección del vector de admitancia con la circunferencia máxima se encuentra en 0.375λ.

Se buscan las intersecciones de la circunferencia $r = 1$ con la circunferencia de admitancia.

Como se muestra en la figura 160.

Estas intersecciones se encuentran en:

$$\widehat{Y_{ln}} = 1 \pm j0.7$$

Si se toma la solución positiva, la distancia d_1 da como resultado:

$$d_1 = 0.155\lambda - 0.375\lambda = -0.22\lambda$$

Como la distancia no puede ser negativa, se agrega una distancia de 0.5λ, en la cual la admitancia y la impedancia se repiten.

$$d_1 = 0.5\lambda - 0.22\lambda = 0.28\lambda$$

Es decir, la admitancia de acople se debe conectar a una distancia de 0.28λ, desde la carga y hacia el generador.

En este punto, la admitancia de entrada tiene un valor de:

$$\widehat{Y_{ln}} = 1 + j0.7$$

Por lo que se debe conectar una admitancia reactiva de un valor de:

$$\widehat{Y_{comp}} = -j0.7$$

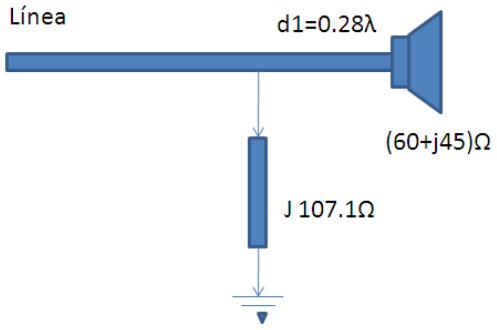
Lo cual equivale a una impedancia de:

$10\widehat{Z_{comp}} = \frac{1}{\widehat{Y_{comp}}} = \frac{1}{-j0.7} = j1.429$

Expresada en ohmios queda:

$$Z_{comp} = \widehat{Z_{comp}} \times Z_0 = j1.429 \times 75\Omega = j107.1\Omega$$

El sistema completo queda:



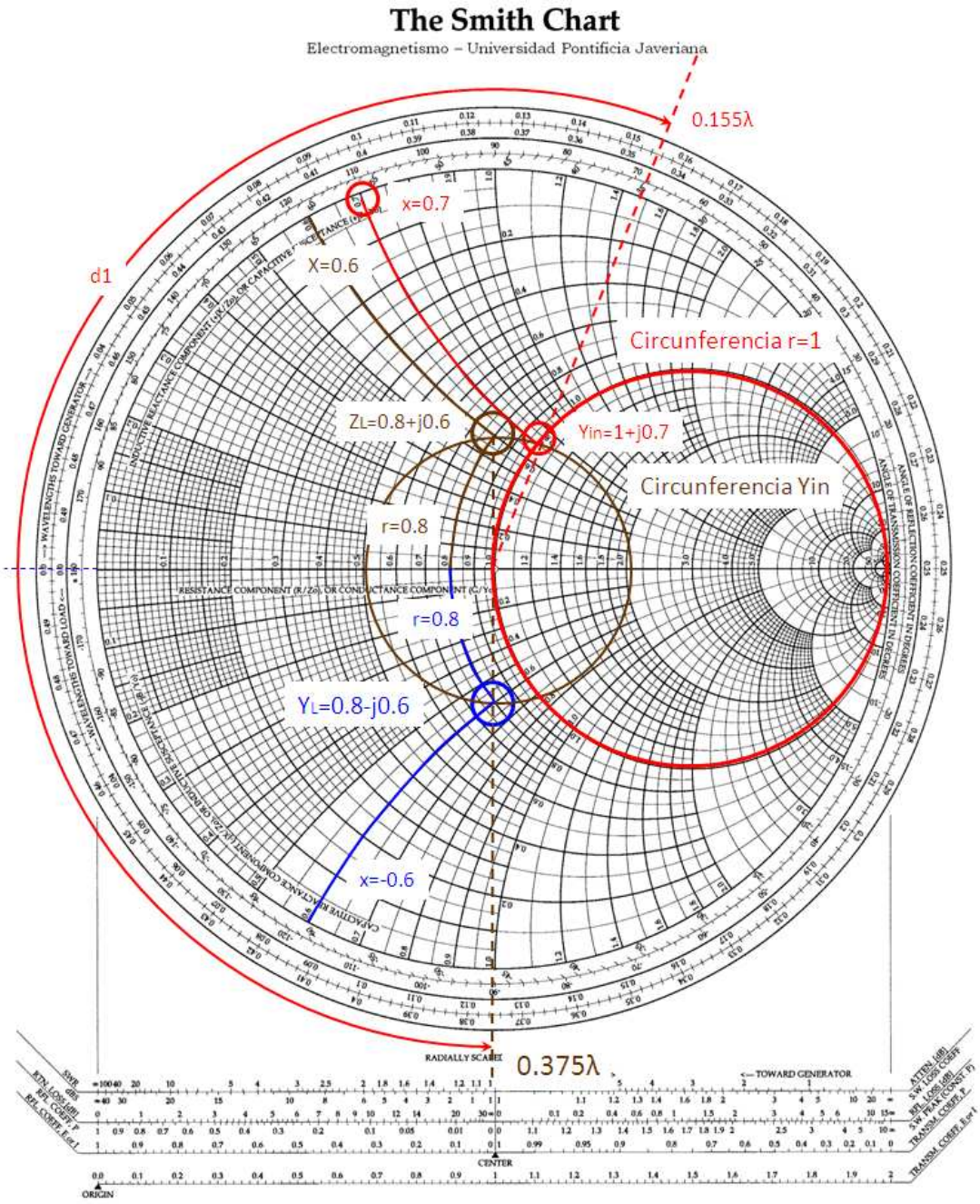


Figura 160. Distancias de referencia para ubicación de la admitancia de compensación – Carta de Smith. Ejemplo 100

Acople reactivo a partir de secciones del mismo conductor

En lugar de conectar admitancias de compensación, se usan normalmente porciones del mismo cable que constituye la línea, rematados en cortocircuito o en circuito abierto, dependiendo de la necesidad.

La longitud de cable que se debe usar, se puede obtener mediante carta de Smith o por cálculo directo a través de la admitancia de una línea en corto o en circuito abierto.

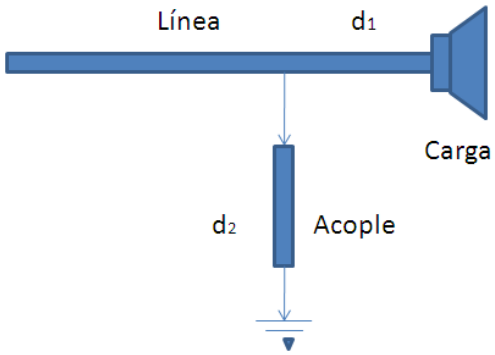


Figura 161. Acople reactivo con base en una sección del mismo conductor

Esta porción de cable recibe el nombre de acople reactivo[33] y se obtiene a partir del punto de admitancia de cortocircuito o de circuito abierto desplazándose sobre el círculo máximo $r = 0$.

Para el ejemplo anterior, la porción de cable que se debe conectar en cortocircuito se calcula usando la carta de Smith, como se muestra en la figura 162.

$$d_{2-cc} = 0.402\lambda - 0.25\lambda = 0.152\lambda$$

Si el acople se hace con una línea en circuito abierto, la longitud de cable a conectar sería:

$$d_{2-oc} = 0.402\lambda$$

[33] En inglés se denomina STUB.

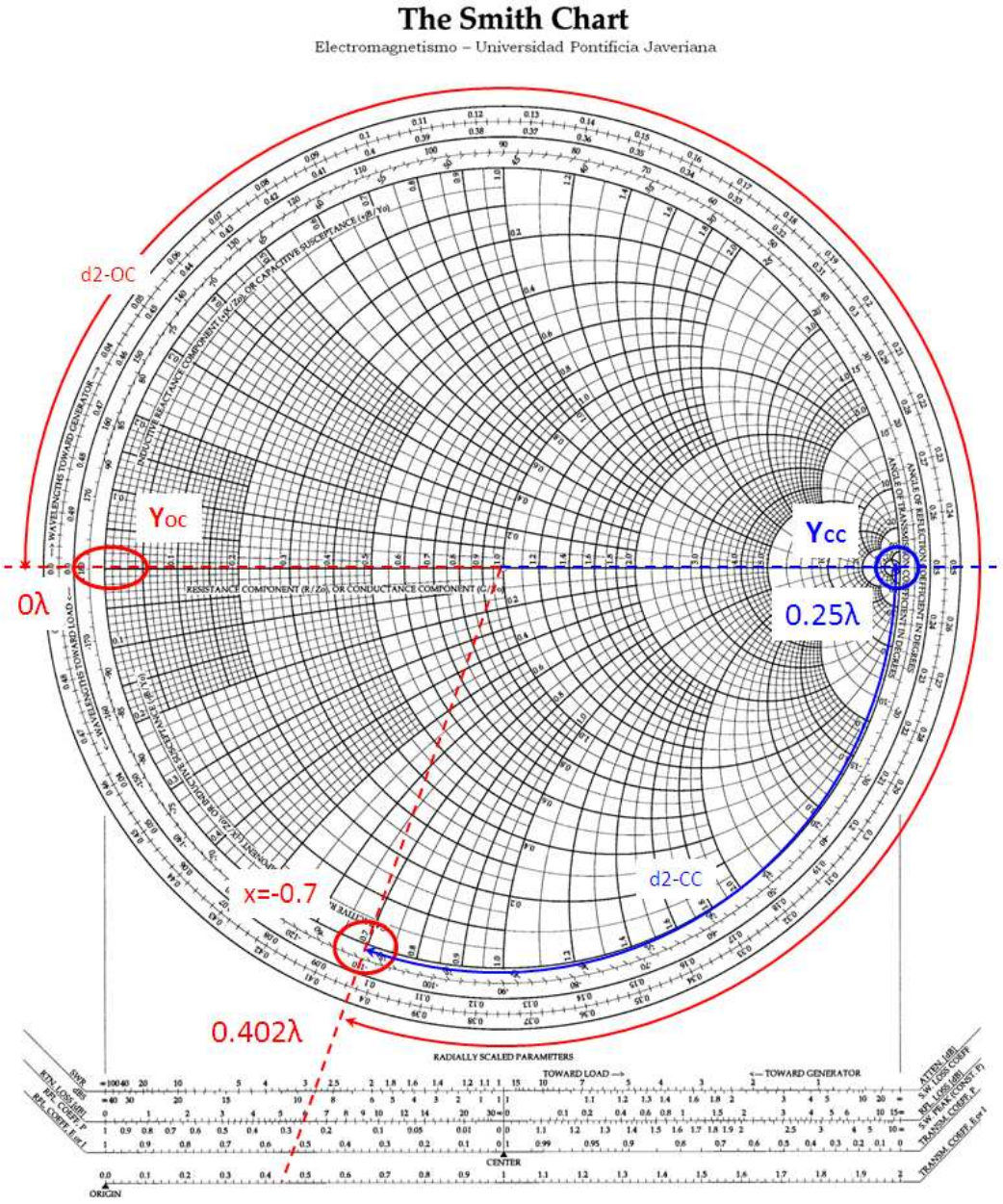


Figura 162. Acople reactivo con base en una sección del mismo conductor. Ejemplo 100

Guías de onda

Una guía de onda es cualquier estructura que permite guiar ondas electromagnéticas para ser transmitidas desde un punto a otro, y dentro de la cual los campos electromagnéticos se encuentran confinados a una región del espacio.

La estructura de una guía de onda está formada por una superficie altamente conductora que forma las paredes de la guía y un material aislante que se encuentra en medio de ellas a través del cual se propaga la onda EM. Figura 163.

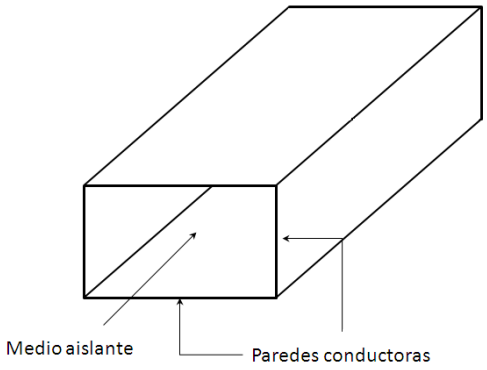


Figura 163. Estructura de una guía de onda rectangular

Las ondas electromagnéticas se propagan por reflexión múltiple en las paredes de la guía, llevando la energía electromagnética a lo largo de la estructura, con solo las pérdidas generadas por reflexión, tal como se muestra en la figura 164.

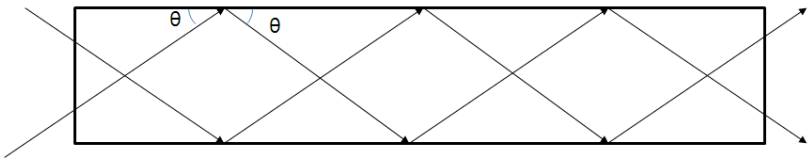


Figura 164. Propagación de una onda EM a través de una guía de onda

En una guía de onda, la onda se propaga por reflexión total entre las paredes conductoras en forma de Zigzag a través del material dieléctrico.

De acuerdo con la Ley de Snell el ángulo de incidencia de la onda sobre la pared de la guía, es igual al ángulo de reflexión, como se muestra en la figura 164. El ángulo θ tiene un valor máximo de $\frac{\pi}{2}$, para garantizar la propagación de la onda.

Aunque la figura 163 muestra una guía de onda rectangular, en realidad cualquier estructura con paredes reflectantes puede servir de guía de onda. Se pueden encontrar guías de onda de diferentes perfiles, como los que se muestran en la figura 165.

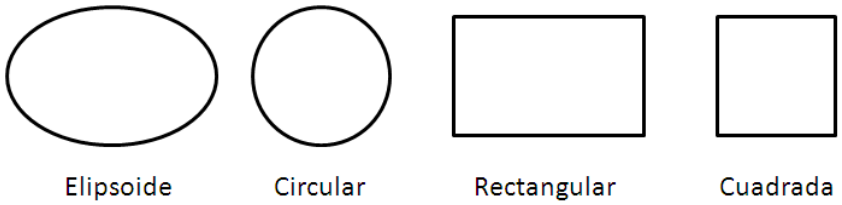


Figura 165. Diferentes perfiles para guías de onda

Sin embargo, las guías de onda más comunes son las rectangulares y las circulares.

En cuanto a los materiales constructivos, a pesar de que las paredes pueden ser hechas de cualquier material conductor, son más comunes el aluminio y el acero, aunque para aplicaciones específicas se usan paredes de cobre, lo cual en muchos casos no es recomendable ya que incrementa considerablemente el costo. Para el aislante, se emplea normalmente aire, aunque en algunos casos se usa espuma de polietileno de baja densidad.

Por su mismo principio de funcionamiento, por una misma guía de onda se pueden propagar simultáneamente diferentes ondas de diversas frecuencias. Dependiendo del número de ondas que se propaguen simultáneamente por el medio, las guías de onda pueden ser mono-modo o multi-modo.

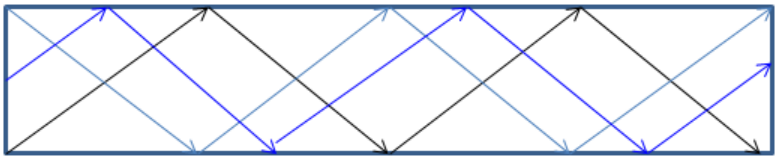


Figura 166. Propagación multi-modo en una guía de onda

Una guía de onda (GDO) opera en el rango por encima de los 3GHz y se usa principalmente en microondas, acoples direccionales, interfaces entre osciladores y antenas.

Principios de propagación

En una GDO, las ondas se propagan de acuerdo con los principios de reflexión e incidencia oblicua, tratados anteriormente en este libro, teniendo los mismos modos de propagación, es decir TE, TM y TEM.

Los coeficientes de reflexión y transmisión en modo TE vienen dados por:

$$r_{12\_TE} = \frac{\eta_2 Cos\theta_1 - \eta_1 Cos\theta_2}{\eta_2 Cos\theta_1 + \eta_1 Cos\theta_2} \qquad t_{12\_TE} = \frac{2\eta_2 Cos\theta_1}{\eta_2 Cos\theta_1 + \eta_1 Cos\theta_2}$$

Mientras en modo TM son:

$$t_{12\_TM} = \frac{2\eta_2 Cos\theta_1}{\eta_1 Cos\theta_1 + \eta_2 Cos\theta_2} \qquad r_{12\_TM} = \frac{\eta_1 Cos\theta_1 - \eta_2 Cos\theta_2}{\eta_1 Cos\theta_1 + \eta_2 Cos\theta_2}$$

En una GDO ideal, la impedancia η_2 es cero, ya que la pared actúa como un conductor ideal.

En esta condición se presenta reflexión total y los coeficientes de Fresnel quedan:

$$r_{12\_TE} = -1 \quad r_{12\_TM} = 1 \quad t_{12\_TE} = 0 \quad t_{12\_TM} = 0$$

La reflectancia en ambos modos se hace 1 y la transmitancia cero. Por lo tanto, no existe potencia transmitida a las paredes y toda la potencia se refleja al dieléctrico.

Para el modo TE, la onda reflejada tiene el campo eléctrico en contrafase con el campo incidente, mientras en el modo TM, los campos magnéticos se encuentra en fase. En la figura 167, se muestra una onda en modo TM propagándose a través de una GDO.

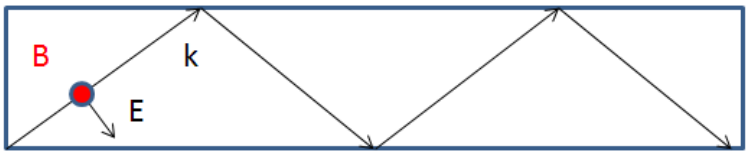


Figura 167. Propagación TM a lo largo de una guía de onda

Guías de onda rectangulares

Las guías de onda rectangulares presentan un perfil como el mostrado en la figura 168. La dimensión **A** es siempre el lado más largo del rectángulo, el otro lado es **B**.

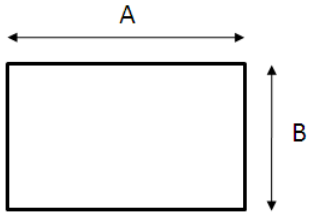


Figura 168. Guía de onda rectangular

Debido a que la onda se propaga por reflexión total en una pared conductora, por condiciones de frontera el campo eléctrico en los puntos de reflexión debe ser cero. Esto implica que la distancia mínima posible entre dos puntos de reflexión total debe ser una semilongitud de onda, como se muestra en la figura 169.

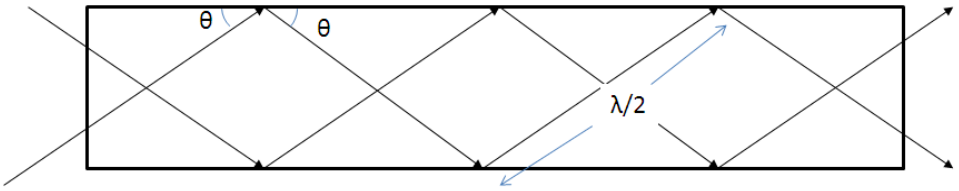


Figura 169. Propagación a lo largo de una guía de onda rectangular

El máximo valor del ángulo de incidencia que garantiza la propagación es de $\frac{\pi}{2}$, que se da cuando una semilongitud de onda, es igual al lado del rectángulo que forma la sección de la guía. Cualquier semilongitud de onda superior a ésta no se propaga a través de la guía.

A su vez, debido a la proporcionalidad inversa entre la frecuencia y la longitud de onda, la mínima frecuencia que se puede transmitir a través de una guía corresponde a la máxima longitud de onda.

La máxima longitud de onda que se puede propagar a lo largo de una guía de onda recibe el nombre de longitud de onda crítica y se puede calcular con base en las dimensiones de la guía.

$$\frac{\lambda_c}{2} = A$$

Por lo tanto:

$$\lambda_c = 2A$$

Esta longitud de onda tiene una frecuencia asociada:

$$f_c = \frac{U}{\lambda_c}$$

Donde **U** es la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el dieléctrico que llena la guía.

Para cualquier frecuencia inferior a la crítica, la longitud de onda es superior y por lo tanto no se propaga. De esta forma, la guía de onda actúa como una especie de filtro que solo permite el paso de señales con una frecuencia superior a la frecuencia crítica.

Para frecuencias superiores a la crítica, la guía de onda permite la propagación de señales, por lo que entre los puntos de reflexión puede haber dos o más semilongitudes de onda, dependiendo de la frecuencia. Para denotar el modo particular que se propaga a través de la GDO se usa el modo (TE, TM o TEM), con dos subíndices que indican cuántas semilongitudes de onda se encuentran en dirección **A** y cuántas en dirección **B**.

En la figura 170, se muestran las Líneas de Fuerza del campo eléctrico y magnético para el modo de propagación TE_{10}. Las líneas de campo **E** se dibujan en línea continua, mientras las de campo **H** están en línea punteada.

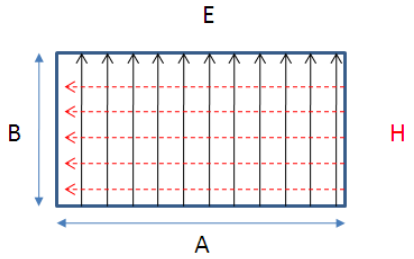


Figura 170. Campo eléctrico y magnético en una guía de onda modo TE_{10}

En la figura 171, se muestran las Líneas de Fuerza para el modo TE_{20}, como se aprecia, el campo E cambia de dirección en el centro de la GDO, esto significa que en ese punto se encuentra un nodo de la onda estacionaria y, por lo tanto, existen dos semilongitudes de onda en dirección **A** y ninguna en dirección **B**.

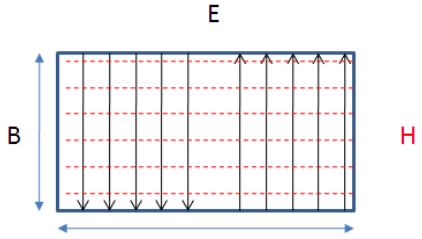


Figura 171. Campo eléctrico y magnético de una onda en modo TE_{20}

En la figura 172, se muestran otras configuraciones de Líneas de Fuerza para otros modos de propagación.

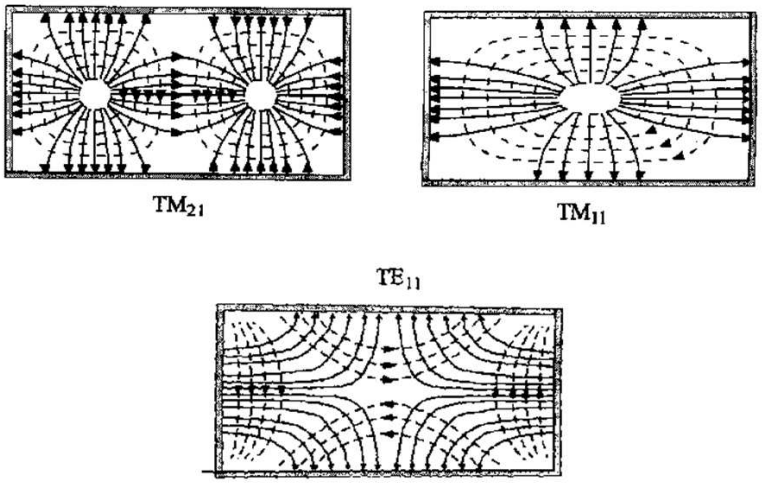


Figura 172. Diferentes modos de propagación en una GDO rectangular[34]

[34] Tomado de "Plot of modal field distribution in rectangular and circular waveguides": IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, VOL. MTT-33, NO. 3. March 1985.

El modo TE_{10}, por tener la mínima frecuencia que se propaga dentro de la guía de onda, se denomina modo principal, para cualquier otro modo de propagación, la longitud de onda crítica se calcula como:

$$\lambda_C = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2}}$$

La frecuencia crítica queda definida por:

$$f_C = \frac{U}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2}$$

Donde **m** y **n** son los subíndices del modo de propagación TE_{mn}.

Ejemplo 101. Modos de propagación en guías de onda.

Una guía de onda rectangular, elaborada en cobre ($\sigma=5.8x10^7$ Sm/m), con aire en su interior, tiene dimensiones de 5.5 x3.2 cm. y transporta una señal senoidal.

Encuentre en qué intervalo de frecuencia (f_1, f_2) por dicha línea solo se propaga el modo principal.

Encuentre una frecuencia central del intervalo $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$, en la cual se garantiza la propagación del modo principal.

Solución:

Se calculan las frecuencias de los primeros modos de propagación TE_{10}, TE_{01} y TE_{11}.

$$f_C = \frac{U}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2}$$

Para el modo TE_{10}: $$f_{C10} = \frac{U}{2A} = \frac{3\times10^8 m/seg}{11\times10^{-2} m} = 2.73GHz$$

Para el modo TE_{10}: $$f_{C\_01} = \frac{U}{2B} = \frac{3\times10^8 m/seg}{6.4\times10^{-2} m} = 4.7GHz$$

Para el modo TE_{11}: $$f_{C\_11} = \frac{3\times10^8}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{5.5\times10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3.2\times10^{-2}}\right)^2} = 5.4GHz$$

Por lo tanto, la línea opera en modo principal en el intervalo: 2.73-4.7GHz.

La frecuencia central sería:

$$f_0 = \sqrt{f_1 \times f_2} = \sqrt{2.73\times4.7}GHz = 3.6\ GHz$$

Ejemplo 102. Dimensionado de guías de onda.

A través de una guía de onda rectangular elaborada en aluminio ($\sigma=3.82x10^7 Sm/m$) y con dieléctrico aire ($\sigma=0$), se transfiere una señal a una frecuencia de 4GHz.
Obtenga las dimensiones que debe tener la guía, de tal forma que se garanticen las siguientes condiciones:

Condición 1. Que a través de la GDO solo se propague el modo TE_{10}.
Condición 2. Que la frecuencia de transmisión sea el promedio geométrico (fT2=f1*f2) de la frecuencia de corte del modo dominante y la frecuencia del modo TE_{01}.
Condición 3. Que la frecuencia de corte del modo dominante sea la mitad de la frecuencia de corte del modo TE_{01}.

Solución:

El medio es aire, por lo tanto: $U=3x10^8 m/s$.

Para garantizar que solo se propague el modo TE_{10} se requiere que A>>B

Con la ecuación de la frecuencia crítica para cada modo de propagación:

$$f_{C\_TE_{10}} = \frac{U}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{A}\right)^2+\left(\frac{0}{B}\right)^2} = \frac{U}{2A} \qquad f_{C\_TE_{01}} = \frac{U}{2}\sqrt{\left(\frac{0}{A}\right)^2+\left(\frac{1}{B}\right)^2} = \frac{U}{2B}$$

La condición 2 establece que:

$$f^2 = \left(\frac{U}{2A}\right)\left(\frac{U}{2B}\right) \Rightarrow \quad AB = \left(\frac{U}{2f}\right)^2 = \left(\frac{3\times10^8 m/s}{2\times4\times10^9 Hz}\right)^2 = 1.41\times10^{-3} m^2$$

La condición 3 establece:

$$\left(\frac{U}{2A}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{2B}\right) \quad \Rightarrow \quad A = 2B$$

Reemplazando:

$$AB = 2B^2 = 1.41\times10^{-3} m^2 \quad \Rightarrow \quad B = 2.65cm \quad A = 5.3cm$$

Calculando la frecuencia del modo principal:

$$f_{C\_TE_{10}} = \frac{U}{2A} = \frac{3\times10^8 m/s}{2\times5.3\times10^{-2} m} = 2.53GHz$$

El modo siguiente es el TE_{01}

$$f_{C\_TE_{10}} = \frac{U}{2}\sqrt{\left(\frac{0}{A}\right)^2+\left(\frac{1}{B}\right)^2} = \frac{U}{2B} = \frac{3\times10^8 m/s}{2\times2.65\times10^{-2} m} = 5.06GHz$$

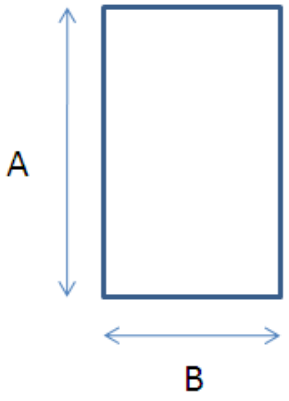
Con lo cual se garantiza la condición 1.

Método gráfico para determinar modos de propagación

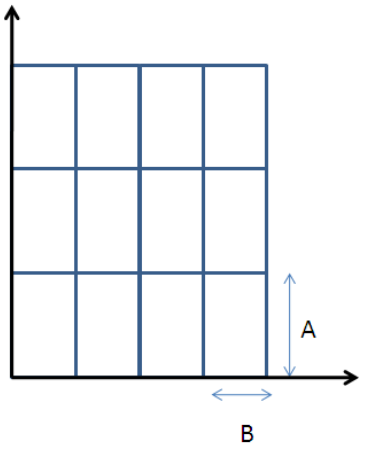
Existe un método gráfico que permite determinar en forma simple los modos que se propagan a través de una guía de onda para una frecuencia específica.

El método usa la relación de las dimensiones de una guía de onda y la relación de la frecuencia de la señal con respecto a la frecuencia del modo principal TE_{10}.

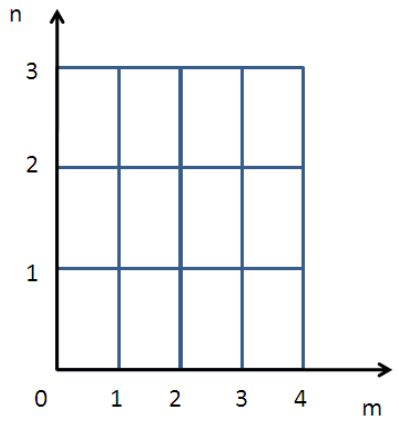
Inicialmente, se toma una hoja de papel milimetrado o cuadriculado y se dibuja un rectángulo vertical con las dimensiones A y B de la guía de onda o dimensiones proporcionales.



Posteriormente, se hacen rectángulos pegados a éste; con las mismas dimensiones se hacen tantos rectángulos como la relación $^{f}/_{f_c}$, donde f es la frecuencia de la onda y f_c la frecuencia de corte del modo principal. Se traza un eje horizontal y un eje vertical.



Las subdivisiones de los rectángulos corresponden a los índices **n** y **m**, respectivamente.



Finalmente, se dibuja un radio vector sobre el eje horizontal cuya longitud es igual a la relación f/f_c. Se traza un cuarto de circunferencia hasta el eje vertical. Los subíndices que quedan dentro del cuarto de círculo o justo en la frontera del mismo se propagan. Los que quedan por fuera no.

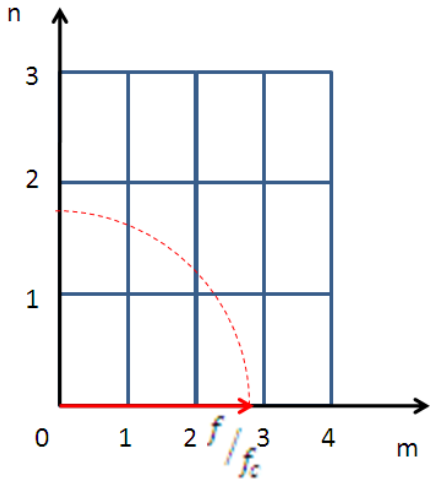


Figura 173. Método gráfico para determinar los modos de propagación en una guía de onda rectangular

En el caso de la figura 173, se propagan los modos: TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, TE_{21}, y sus correspondientes modos TM.

Parámetros de propagación

En una guía de onda, a diferencia de las líneas de transmisión, debido a la particular forma de desplazarse la onda EM, se tienen dos velocidades de propagación y sus respectivas longitudes de onda a considerar.

La primera de ellas se ilustra en la figura 174, y se refiere a la velocidad con la cual se desplaza la energía EM dentro de la guía.

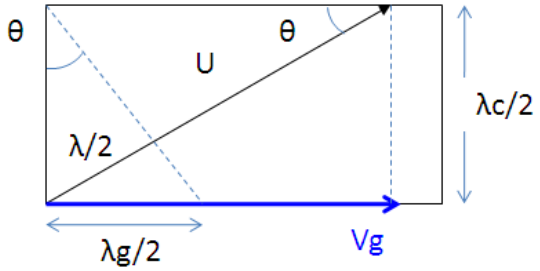


Figura 174. Longitud de onda de grupo dentro de una guía de onda

Como se aprecia en la figura 174, la velocidad de grupo guarda una relación con la velocidad de la onda en el dieléctrico, la cual viene dada por:

$$\frac{v_g}{U} = Cos\ \theta$$

De donde sale que:

$$v_g = UCos\ \theta$$

Debido al modo de propagación, dentro de la guía se forman valles y crestas de energía, ubicados en los puntos de cruce de los rayos. La distancia entre dos valles viene a determinar una semilongitud de onda de energía. Ésta recibe el nombre de longitud de onda de grupo.

$$\frac{\lambda/_2}{\lambda_g/_2} = Cos\ \theta$$

De donde sale:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{Cos\ \theta}$$

El ángulo θ se puede expresar en función de la longitud de onda en el dieléctrico y la longitud de onda crítica:

$$Sen\ \theta = \frac{\lambda/_2}{\lambda_c/_2} = \frac{\lambda}{\lambda_c}$$

La velocidad de la onda EM es constante, independientemente de la frecuencia o la longitud de onda:

$$U = \lambda f$$

Por lo cual:

$$\lambda f = \lambda_c f_c$$

De donde sale:

$$\frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{f_c}{f}$$

Por lo tanto:

$$Sen\ \theta = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{f_c}{f}$$

Dada la identidad:

$$Cos\ \theta = \sqrt{1 - Sen^2\theta}$$

La longitud de onda de grupo queda:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - Sen^2\theta}}$$

Reemplazando:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

A su vez, la velocidad de onda de grupo queda:

$$v_g = U\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

La segunda velocidad a considerar es la llamada velocidad de fase, que corresponde a la velocidad con la que cambia la fase de la onda sobre la pared de la guía, como se muestra en la figura 175.

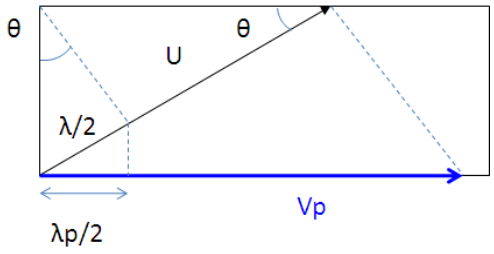


Figura 175. Velocidad de fase sobre una guía de onda

Esta velocidad se encuentra también relacionada con la velocidad de la onda en el dieléctrico:

$$\frac{U}{v_p} = Cos\ \theta$$

De donde se obtiene:

$$v_p = \frac{U}{Cos\ \theta}$$

En función de la frecuencia crítica queda:

$$v_p = \frac{U}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

La velocidad de fase es superior a la velocidad de la onda en el dieléctrico.

La velocidad de fase a su vez lleva relacionada una longitud de onda de fase, que se muestra en la figura 175.

$$\frac{\lambda_p/_2}{\lambda/_2} = Cos\ \theta$$

De donde sale:

$$\lambda_p = \lambda Cos\ \theta$$

En función de la frecuencia crítica se obtiene:

$$\lambda_p = \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

La relación entre la velocidad de grupo y de fase viene determinada por:

$$v_g v_p = U^2$$

Ejemplo 103. Velocidad de grupo y de fase.

A través de una guía de onda rectangular de $5 \times 2.5cm$ con dieléctrico aire, se transmite una señal a una frecuencia de 4.5GHz.

Defina qué modos de propagación se alcanzan a propagar por la guía y si ésta trabaja en monomodo o multimodo. Calcule la velocidad de grupo y de fase para cada modo.

Solución:

La frecuencia de corte del modo principal es:

$$f_{c-TE_{10}} = \frac{U}{2A} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{2 \times 5 \times 10^{-2} m}$$

$$f_{c-TE_{10}} = 3 \times 10^9 Hz = 3GHz$$

La relación $^{f}/_{f_c}$, da como resultado:

$$\frac{f}{f_c} = \frac{4.5GHz}{3GHz} = 1.5$$

La relación A/B es de 2, por lo que en el método gráfico solo se propaga el modo principal.

La velocidad de grupo:

$$v_g = U\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$v_g = 3 \times 10^8 m/s\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4.5}\right)^2} = 2.24 \times 10^8 m/s$$

La velocidad de fase:

$$v_p = \frac{3 \times 10^8 m/s}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4.5}\right)^2}} = 4 \times 10^8 m/s$$

Aquí existe una contradicción aparente, ya que la velocidad de fase es superior a la velocidad de la luz, sin embargo, debe recordarse que la velocidad de fase no corresponde a ningún desplazamiento físico, sino a una diferencia de fase entre una onda y otra que se toma como referencia, es decir, la velocidad con la que cambia la fase de una señal.

Impedancia intrínseca

Se comporta igual al a impedancia intrínseca de una línea de transmisión pero con la corrección debida a la relación con la frecuencia crítica.

Se hace diferencia entre la impedancia en modo TE y la impedancia en modo TM.

$$Z_{0\_TE} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-\left(\frac{f_C}{f}\right)^2}} \qquad Z_{0\_TM} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{f_C}{f}\right)^2}$$

Las impedancias en ambos modos están relacionadas como:

$$Z_{0\_TE}Z_{0\_TM} = \eta^2$$

Estas impedancias corresponden a la impedancia de la guía de onda. Al acoplarse con una impedancia de carga, la impedancia de entrada es igual a la de una línea sin pérdidas.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0\, Tan\left(2\pi\frac{x}{\lambda_g}\right)}{Z_0 + jZ_L\, Tan\left(2\pi\frac{x}{\lambda_g}\right)}$$

Ejemplo 104. Impedancia intrínseca.

A través de una guía de onda rectangular de $5 \times 2.5 \times 30cm$. con dieléctrico aire, se transmite una señal en modo TE_{10} a una frecuencia de 4.5GHz. La guía está rematada por una antena tipo cuerno con una impedancia equivalente de $Z_L = (150 - j50)\Omega$.

Calcule la impedancia de entrada del conjunto.

Solución:

La frecuencia de corte del modo principal es:

$$f_{c-TE_{10}} = \frac{U}{2A} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{2 \times 5 \times 10^{-2} m}$$

$$f_{c-TE_{10}} = 3 \times 10^9 Hz = 3GHz$$

La relación $f_c/_f$, da como resultado:

$$\frac{f_c}{f} = \frac{3GHz}{4.5GHz} = \frac{2}{3}$$

La impedancia intrínseca del aire es:

$$\eta_0 = 120\pi\Omega$$

La impedancia intrínseca de la guía en modo TE.

$$Z_{0\_TE} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-\left(\frac{f_C}{f}\right)^2}} = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 506\Omega$$

La longitud de onda en el aire es:

$$\lambda = \frac{U}{f} = \frac{3\times10^8 m/s}{4.5\times10^9 Hz} = \frac{2}{30}m \cong 6.6cm$$

La longitud de onda de grupo:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\frac{2}{30}m}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 8.94cm$$

La impedancia de entrada:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0\,Tan\left(2\pi\frac{x}{\lambda_g}\right)}{Z_0 + jZ_L\,Tan\left(2\pi\frac{x}{\lambda_g}\right)}$$

Reemplazando:

$$Z_{in} = 506\Omega \frac{(150-j50)\Omega + j(506\Omega)Tan\left(2\pi\times\frac{30\,cm}{8.94\,cm}\right)}{(506\Omega) + j(150-j50)\Omega Tan\left(2\pi\times\frac{30\,cm}{8.94\,cm}\right)}$$

$$Z_{in} = (435-j608)\Omega = 708\langle -54^0\rangle\Omega$$

La impedancia intrínseca de la guía de onda tiene una fuerte dependencia de la frecuencia de transmisión. En la figura 176, se muestra la impedancia TE para dos modos de propagación en una guía de 5cm x 2.5cm.

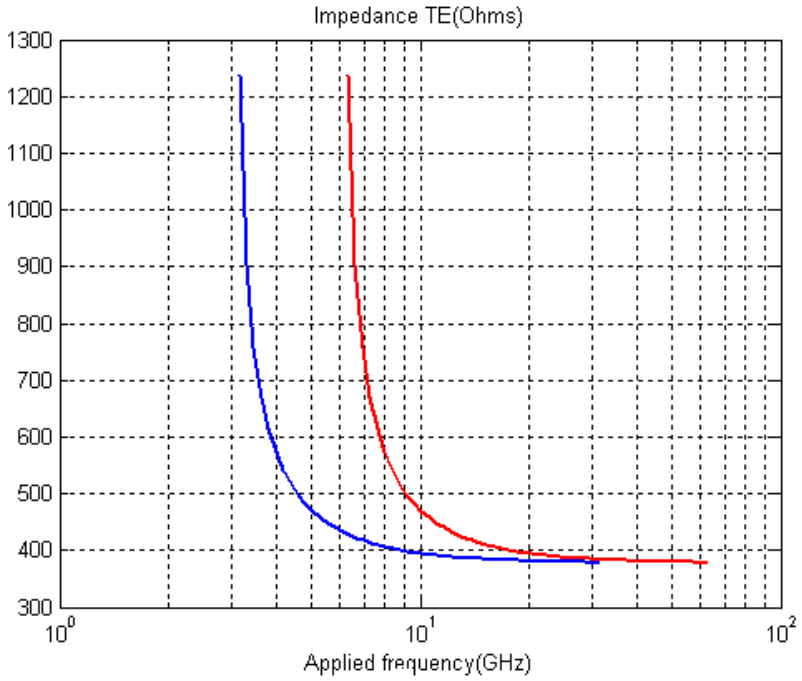


Figura 176. Impedancia intrínseca de una guía de onda de 5x2.5cm. para el modo TE_{10} – azul y TE_{01} – rojo en función de la frecuencia

Como se observa claramente, cuando la frecuencia se acerca a la frecuencia de corte del modo especifico, la impedancia intrínseca tiende a infinito, impidiendo su propagación.

Potencia y pérdidas en guías de onda rectangulares

En las guías de onda ideales, la reflexión en las paredes es total, ya que no se presenta campo transmitido. Sin embargo, en condiciones no ideales, una pequeña cantidad de la potencia transportada por la onda EM es cedida al medio conductor, generando pérdidas por efecto Joule.

La impedancia intrínseca de un buen conductor viene determinada por:

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

En una guía de onda, hecha de cobre ($\sigma = 5.8 \times 10^7 Sm/m$) , el valor en una frecuencia de 4GHz vendría a ser:

$$|\eta| = \sqrt{\frac{2\pi \times 4 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7}}$$

$$|\eta| = 23m\Omega$$

Esta pequeña impedancia, hace que el coeficiente de transmisión sea ligeramente diferente de cero y que parte de la potencia transportada por la onda se transmita a la pared. Existe, por lo tanto, un coeficiente de atenuación ligado a la conductividad de la pared de la guía, que determina la pérdida de potencia.

La atenuación debida al conductor para un modo particular de propagación viene determinada por:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{BZ_{0\_TM}}\left[1+\frac{2B}{A}\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right] \quad Np/m$$

Donde el parámetro **Rs** es la resistencia equivalente por unidad de longitud, considerando el efecto superficial, y A y B son las dimensiones de la GDO.

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta_p} = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma_c}} \quad \Omega$$

Adicionalmente, se consideran las pérdidas por efecto Joule en el dieléctrico que llena la GDO. Estas pérdidas son normalmente despreciables, pero dependiendo de la tangente de pérdidas del dieléctrico, pueden llegar a ser importantes.

$$\alpha_d = \frac{\sigma_d}{2} Z_{0\_TM} \quad Np/m$$

La constante de atenuación total puede calcularse como la suma de ambas componentes:

$$\alpha_g = \alpha_c + \alpha_d$$

La constante de propagación en la GDO queda determinada por:

$$\gamma_g = \alpha_g + j\beta_g$$

Donde:

$$\beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

Es denominada constante de fase de grupo.

El vector de Poynting en el interior de la GDO queda determinado por:

$$\overline{P}(x) = \overline{P}_0 e^{-2\alpha_g x} = \frac{E_0^2}{|Z_{in}|} Cos(\theta_{Z_{in}}) e^{-2\alpha_g x}$$

Donde Z_{in} es la impedancia de entrada de la guía y E_0 es el campo eléctrico en la entrada de la guía.

Las pérdidas dentro de la guía se pueden también medir en escala logarítmica, usando:

$$p = 20\alpha_g \log_{10} e \cong 8.69\alpha_g \quad Db/m$$

Ejemplo 105. Constante de atenuación en guías de onda rectangulares.

Una guía de onda rectangular, elaborada en cobre (σ=5.8x10^7 Sm/m) con aire en su interior, tiene dimensiones de 5.5 x3.2 cm. y transporta una señal senoidal.

Encuentre en qué intervalo de frecuencia (f_1, f_2) por dicha línea solo se propaga el modo principal.

Halle una frecuencia central del intervalo a la cual se garantiza la propagación del modo principal. Encuentre la mínima longitud (cm) de la guía en la cual se presentan ondas estacionarias.

Calcule la constante de atenuación en la guía a dicha frecuencia, desprecie las perdidas en el aire.

Solución:

Se calculan las frecuencias de los primeros modos de propagación TE_{10} y TE_{01}.

$$f_C = \frac{U}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2}$$

Para el modo TE_{10}: $$f_{C10} = \frac{U}{2A} = \frac{3\times10^8 m/seg}{11\times10^{-2} m} = 2.73GHz$$

Para el modo TE_{01}: $$f_{C\_01} = \frac{U}{2B} = \frac{3\times10^8 m/seg}{6.4\times10^{-2} m} = 4.7GHz$$

Por lo tanto, la línea opera en modo principal en el intervalo: 2.73-4.7GHz.

La frecuencia central sería:

$$f_0 = \sqrt{f_1 \times f_2} = \sqrt{2.73 \times 4.7} GHz = 3.6 GHz$$

La mínima longitud de la guía para que se presenten ondas estacionarias es:

$$\lambda_g = \frac{U}{f\sqrt{1-\left(\frac{f_C}{f}\right)^2}} = \frac{3\times10^8\, m/s}{3.6\times10^9\, Hz\sqrt{1-\left(\frac{2.73}{3.6}\right)^2}} = 19.6 \quad cm$$

Las ondas estacionarias se presentan cada λg/2

La constante de atenuación queda:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{bZ_{0\_TM}}\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right] \quad Np/m \qquad R_s = \frac{1}{\sigma\delta_p} = \sqrt{\frac{\pi\,\mu\, f}{\sigma}} \quad \Omega$$

$$Z_{0\_TM} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{f_C}{f}\right)^2}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi\times4\pi\times10^{-7}\times3.6\times10^9}{5.8\times10^7}} = 15.6 \quad m\Omega$$

$$Z_{0\_TM} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{1-\left(\frac{2.73}{3.6}\right)^2} = 362.15\Omega$$

$$\alpha_c = \frac{15.6\times10^{-3}}{\left(3.2\times10^{-2}\right)\times362.15}\left[1+\frac{2\times3.2}{5.5}\left(\frac{2.73}{3.6}\right)^2\right] \quad Np/m = 0.00225\, Np/m$$

Expresada en dB.

$$\propto_{dB/m} = 0.02\ dB/m$$

Las pérdidas, al igual que la impedancia intrínseca, también tienen una fuerte dependencia de la frecuencia, debido principalmente a dos efectos:

1. La impedancia intrínseca cambia con la frecuencia, por lo que la densidad de potencia que recibe la GDO cambia y las pérdidas también.

2. La profundidad de penetración de la señal en la pared de la guía cambia modificando el parámetro Rs y ocasionando el incremento de la constante de atenuación.

En la figura 177, se muestran las pérdidas normalizadas para una guía de onda de 5x2.5cm elaborada en cobre.

Como se aprecia claramente, las pérdidas tienden a incrementarse con la frecuencia, por lo que no resulta conveniente operar la guía en frecuencias muy superiores a la de corte del modo principal.

Normalmente, se busca la frecuencia de operación óptima en el punto de mínimas pérdidas.

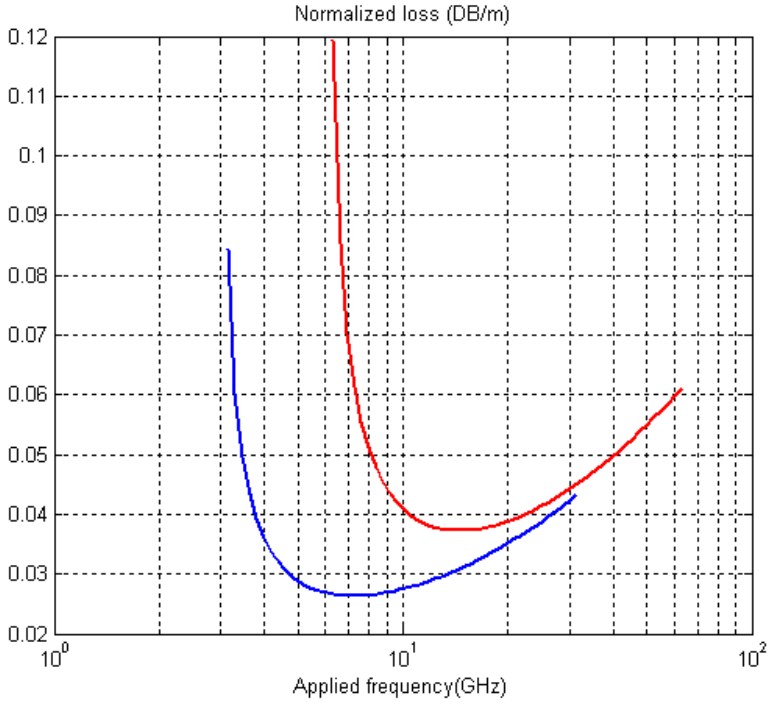


Figura 177. Pérdidas normalizadas en una guía de onda de 5x2.5cm. para el modo TE_{10}(azul) y TE_{01}(rojo), elaborada en cobre

Para las guías de onda cuadradas, las ecuaciones son iguales en las guías de onda rectangulares, solo que se cumple B=A.

En este caso, la frecuencia de corte del modo TE_{10} es igual a la del modo TE_{01} y la segunda frecuencia de corte en orden ascendente es la del modo TE_{11}.

Guías de onda circulares

Las guías de onda de perfil circular tienen la ventaja de funcionar más eficientemente en forma multimodal reduciendo la atenuación por unidad de longitud considerablemente (<30Db/km).

Se usan en aplicaciones en donde se requiera transportar potencia eficientemente en distancias relativamente largas. Su estructura se muestra en la figura 178.

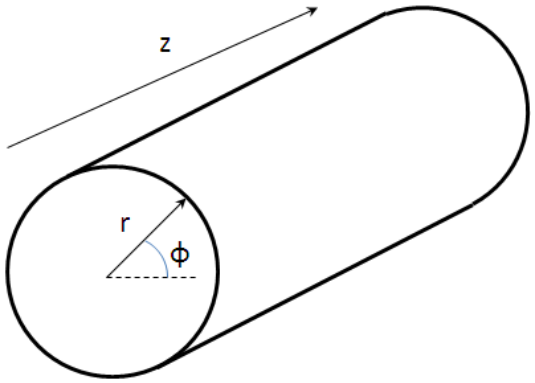


Figura 178. Esquema de una guía de onda circular

Tienen esencialmente los mismos modos de propagación de las guías rectangulares, pero la relación entre ellos, las dimensiones físicas de la guía y la frecuencia crítica son diferentes. Se basan en un conjunto de coeficientes denominados de Bessel, pero los subíndices se refieren al número de semilongitudes de onda en dirección φ y r, respectivamente.

El modo de propagación TE_{01}, por ejemplo, presenta una semilongitud de onda en dirección φ y ninguna en dirección r.

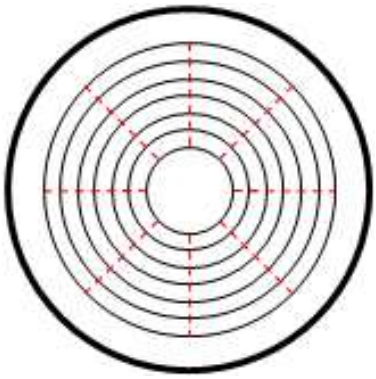


Figura 179. Modo de propagación TE_{01} en una guía de onda circular.
Las líneas de campo eléctrico son continuas, las de campo magnético punteadas.

El modo de propagación principal en este tipo de guía es el modo TE_{11}, debido a la simetría que presenta la guía, la longitud de onda de corte para este modo es de 3.41 veces el radio de la guía.

Para los siguientes modos de propagación la longitud de onda de corte se encuentra en la tabla 17.

Tabla 17. Longitud de onda de corte para diferentes modos de propagación en una guía de onda circular

Modo de propagación	Longitud de onda de corte
TE_{11}	$3.41r_0$
TM_{01}	$2.61r_0$
TE_{21}	$2.06r_0$
TE_{01}, TM_{11}	$1.64r_0$
TE_{31}	$1.49r_0$
TM_{21}	$1.22r_0$
TE_{41} TE_{12}	$1.18r_0$
TM_{02}	$1.14r_0$
TM_{31} TE_{51}	$0.98r_0$
TE_{22}	$0.94r_0$
TM_{12} TE_{02}	$0.89r_0$
TM_{41} TE_{61}	$0.83r_0$

Ejemplo 106. Frecuencias de corte en guías de onda circulares.

Una guía de onda circula rellena de aire en su interior tiene un radio de 2.6 cm. y transporta una señal senoidal.

Encuentre en qué intervalo de frecuencia (f_1, f_2) por dicha línea solo se propaga el modo principal.

Halle una frecuencia central del intervalo a la cual se garantiza la propagación del modo principal.

Solución:

La longitud de onda de corte del modo principal es:

$$\lambda_{c-TE_{11}} = 3.41r_0 = 3.41 \times 2.6cm = 8.866cm$$

La frecuencia de corte asociada es:

$$f_{c-TE_{11}} = \frac{U}{\lambda_{c-TE_{11}}} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{8.866cm} = 3.38GHz$$

La longitud de onda de corte del siguiente modo:

$$\lambda_{c-TM_{01}} = 2.61r_0 = 2.61 \times 2.6cm = 6.786cm$$

La frecuencia de corte asociada es:

$$f_{c-TM_{01}} = \frac{U}{\lambda_{c-TM_{01}}} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{6.786cm} = 4.42GHz$$

Es decir, en el intervalo $(3.38Ghz, 4.42Ghz)$ se propaga solo el modo principal.

La frecuencia central del intervalo es:

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{3.38 \times 4.42}GHz = 3.86GHz$$

Propagación en fibra óptica

El principio de reflexión total interna se usa para transmitir de manera altamente eficiente señales electromagnéticas a través de fibra óptica.

En una fibra óptica se transmiten señales en infrarrojo (700 a 1300nm) con atenuaciones muy pequeñas, (<0.25DB/km) por lo que se usan en grandes distancias.

Por su amplísimo ancho de banda, se pueden usar para transmitir gran cantidad de señales en forma multimodal.

Una línea de fibra óptica está constituida por un núcleo central, el cual se encuentra recubierto por un revestimiento que tiene un índice de refracción inferior al del núcleo, como se muestra en la figura 180. La línea se encuentra usualmente aislada del medio exterior por una funda opaca que evita la dispersión y protege contra la polución o la contaminación luminosa del entorno.

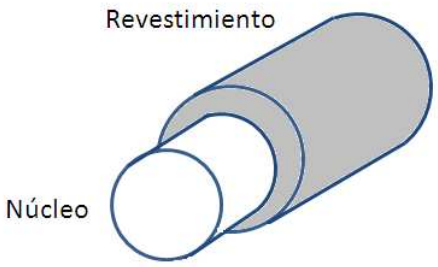


Figura 180. Esquema de un haz de fibra óptica

El haz de luz se propaga dentro de la fibra como se muestra en la figura 181. Como emisor se usa normalmente un fotodiodo y como receptor un fototransistor.

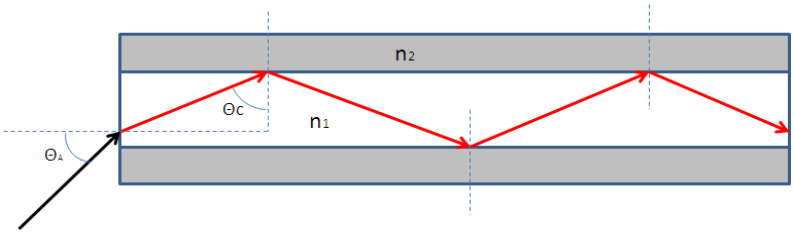


Figura 181. Propagación de un haz de luz a través de fibra óptica

Para garantizar la propagación de la señal, existe un ángulo crítico con el cual el haz de luz debe ingresar al núcleo de la fibra. Este ángulo se llama de admisión y solo se propagan haces que ingresen con un ángulo igual o inferior a éste.

$$Sen(\theta_e) = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}$$

Por su configuración simple, la fibra óptica se construye normalmente en materiales flexibles, como diferentes tipos de plásticos o derivados del polietileno, lo cual le da una gran flexibilidad y facilidad en la instalación. Normalmente, se empaca en paquetes que contienen cientos o miles de haces dependiendo de las necesidades.

Para garantizar la propagación de un solo modo, la longitud de onda de referencia es:

$$\lambda_0 > 2.61 r_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

La frecuencia asociada es:

$$f < \frac{c}{2.61 r_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

Ejercicios del capítulo

Parte 1. Líneas parámetros y modelos

1. Calcule los parámetros eléctricos de una línea coaxial en cobre con los siguientes parámetros geométricos y a la frecuencia dada (PE=Polietileno).

Calibre AWG	Diámetro aislante (mm)	Malla de tierra (mm)	Frecuencia (MHz)	Aislante
22	4.7	0.04	10	PE
28	3.5	0.02	250	PE
18	8.5	0.12	150	PE
24	5.2	0.08	50	PE

2. Calcule los parámetros eléctricos de una línea bifilar en aluminio con los siguientes parámetros geométricos y a la frecuencia dada:

Calibre AWG	Separación (mm)	Frecuencia (kHz)	Aislante
32	2.0	120	PE
24	3.5	320	PE
18	6.2	450	PE
22	5.4	800	PE

3. Calcule los límites de operación en alta frecuencia para que un cable coaxial en cobre y polietileno con los siguientes parámetros geométricos presente una atenuación máxima de 3dB/km. Desprecie las pérdidas en el aislamiento:

   a=0.35mm b=1.25mm t=0.03

   Establezca en qué bandas este cable se encuentra operando en: a) Baja frecuencia. b) Frecuencia media. c) Alta frecuencia.

4. Repita los cálculos del punto 3, para los cables del punto 1, considerando una atenuación máxima de 10dB/100m.

5. Un cable bifilar en cobre presenta los siguientes parámetros geométricos:

   a=0.35mm D=2.5mm

   Encuentre la frecuencia límite de operación para que las pérdidas máximas sean de 3dB/100m.

   Defina las bandas de operación para este cable en: a) Baja frecuencia. b) Frecuencia media. c) Alta frecuencia.

Parte 2. Parámetros de propagación en líneas de transmisión

6. Un cable no disipativo (LC), sin pérdidas, tiene los siguientes parámetros distribuidos: $L = 0.5\frac{uH}{m}$ y $C = 150\frac{pF}{m}$ Encuentre el factor de velocidad y la impedancia característica.

7. Un cable no disipativo tiene un factor de velocidad de 0.9 y una impedancia característica de 50Ω. Calcule la inductancia y la capacitancia distribuidas.

8. Una línea no disipativa tiene una impedancia característica de 100Ω y un factor de velocidad de 0.75. La línea termina en una carga de 50Ω. Si el voltaje incidente es de 6VRMS, 10MHz, calcule el valor del voltaje máximo y mínimo sobre la línea, la distancia desde la carga en donde se encuentra el primer máximo de voltaje, la VSWR y el porcentaje de potencia reflejada y transmitida.

9. Una línea no disipativa tiene una impedancia característica de 50Ω, termina en una carga de 20Ω. Calcule el coeficiente de reflexión, la VSWR y la impedancia de entrada para $\ell = 0.35$.

10. Calcule los parámetros de propagación para una línea de transmisión con los siguientes parámetros eléctricos medidos a una frecuencia de 10MHz:

    a) $L = 0.6\ {}^{\mu H}/_{m}\ \ C = 12pF/m$
    b) $L = 0.6\ {}^{\mu H}/_{m}\ \ C = 12\frac{pF}{m}\ \ R = 0.1\ \Omega/m$
    c) $L = 0.6\ {}^{\mu H}/_{m}\ \ C = 12\frac{pF}{m}\ \ R = 0.1\ \frac{\Omega}{m}\ \ G = \ 10^{-6}\ \Omega^{-1}/m$

11. Calcule la impedancia intrínseca en alta frecuencia para las siguientes líneas construidas en cobre ($\sigma = 5.8 \times 10^7$Sm/m):

    a) Bifilar aislada por aire: $D = 1.4\ cm\ \ a = 0.6mm$
    b) Bifilar aislada por polietileno: $D = 1.4\ cm\ \ a = 0.6mm$
    c) Doble cinta aislada por aire: $D = 2cm\ \ h = 2.5mm\ \ t = 80um$
    d) Doble cinta aislada por polietileno: $D = 2cm\ \ h = 2.5mm\ t = 80um$

12. Calcule la impedancia intrínseca, el factor de velocidad, la longitud de onda, la atenuación debida al conductor, al dieléctrico y la total, para una línea de microcinta elaborada en plata($\sigma = 6.17 \times 10^7$Sm/m) y aislada con baquelita $\left(\sigma = 10^{-9}\,\frac{\text{Sm}}{\text{m}}\ \epsilon_r = 4.8\right)$, operando a 100MHz, con los siguientes parámetros geométricos: w = 2mm h = 1mm t = 10um.

13. Se conecta un generador de voltaje de 120VRMS 100MHz Zg=60Ω, a una antena que tiene un circuito equivalente, formado por una resistencia de 40Ω y una inductancia serie de 0.12uH, mediante 1.8m de cable coaxial de impedancia característica 75Ω, fv=0.85. Calcule la potencia incidente, reflejada y transmitida en la carga, la potencia incidente entregada por el generador y la distancia a la cual se ubican los máximos de voltaje sobre la línea y la VSWR.

14. Un generador de señales de impedancia interna 60Ω, se conecta con la carga a través de una línea de transmisión no disipativa con impedancia intrínseca 75Ω $\ell = 0.25$. ¿Qué impedancia se debe conectar como carga para obtener la máxima transferencia de potencia?

15. En una línea de transmisión se tiene un SVWR=3 y el máximo de voltaje se encuentra justo en la carga. La potencia disipada en la carga es de 90W. Calcule el coeficiente de reflexión, la impedancia de carga normalizada, la potencia incidente y la reflejada.

Parte 3. Fibra óptica

1. Encuentre el ángulo crítico con el cual debe incidir un rayo de luz en una fibra óptica, hecha con un material de ε_r=2, rodeado por un material de ε_r=1.5, para que exista reflexión total.

2. En la fibra óptica, que se muestra en la figura 3, encuentre en función de η_1 y η_2, el valor máximo que puede tener el ángulo φ, para garantizar la propagación de la onda.

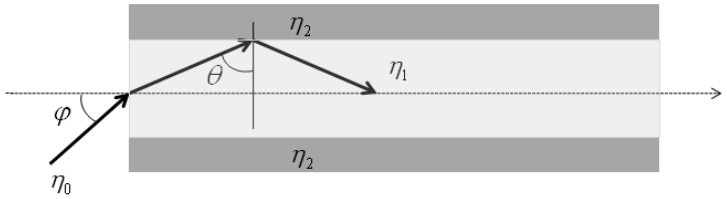


Figura 3

3. En la fibra óptica, que se muestra en la figura del problema anterior, encuentre el valor que debería tener la impedancia η_0 en función de η_1 y η_2, para que el ángulo φ corresponda al ángulo de Brewster y se garantice la propagación de la onda.

Respuestas a los ejercicios

Parte 1. Líneas parámetros y modelos

1.

Parámetros	R(Ω/m)	L(uH/m)	C(pF/m)	G(Sm/m)
1	0.46	0.40	63	3.2e-16
2	4.47	0.48	53	2.6e-16
3	1.11	0.42	59	3e-16
4	1.26	0.46	54	2.7e-16

2.

Parámetros	R(Ω/m)	L(uH/m)	C(pF/m)	G(Sm/m)
1	1.07	1.39	21	1.05e-16
2	0.31	1.25	24	1.20e-16
3	0.13	1.20	25	1.26e-16
4	0.30	1.33	22	1.11e-16

3. 4.8MHz<f<5.35MHz LF<36kHz MF: 36kHz<f<4.8MHz HF>4.8MHz.

4.

Cable	f_1-f_2(MHz)	LF(<kHz)	HF(>MHz)
1	2.7-156	42	2.7
2	11-61	169	11
3	0.3-460	16	0.3
4	0.68-143	67	0.68

5. 3.5MHz<f<34MHz LF<35kHz MF: 35kHz<f<3.5MHz HF>3.5MHz.

Parte 2. Parámetros de propagación en líneas de transmisión

6. $f_v = 0.385$ $Z_0 = 57.7\Omega$
7. $C = 74\frac{pF}{m}$ $L = 0.18\frac{uH}{m}$
8. $V_{max} = 8\,V_{RMS}$ $V_{min} = 4\,V_{RMS}$ $x_{max} = 5.63m$ $VSWR = 2$ $R = 11.1\%$ $T = 89.9\%$
9. $\Gamma = -0.428$ $VSWR = 2.5$ $Z_{in} = 62.8\langle -45^0 \rangle$
10. a) $\propto = 0$ $\beta = 0.17$ $Z_o = 224$ $f_v = 0.8$
    b) $\propto = 1.95\frac{dB}{km}$ $\beta = 0.17$ $Z_o = 224$ $f_v = 0.8$
    c) $\propto = 1.95\frac{dB}{km}$ $\beta = 0.17$ $Z_o = 224$ $f_v = 0.8$
11. a) $Z_o = 69\langle -2.4^0 \rangle$
    b) $Z_o = 45.8\langle -2.4^0 \rangle$
    c) $Z_o = 470\langle -1^0 \rangle$
    d) $Z_o = 314\langle -1^0 \rangle$
12. $Z_o = 46.5\Omega$ $f_v = 0.52$ $\lambda = 1.56m$ $\alpha_c = 0.236\frac{dB}{m}$ $\alpha_d = 6 \times 10^{-7}\frac{dB}{m}$
13. $P_g^+ = 75.2W$ $P_1^+ = 44.55W$ $P_1^- = 16.28W$ $P_2^+ = 28.27W$ $VSWR = 4$
    $x_{MAX} = 0.49m, 1.77m$
14. $Z_L = 93.75\Omega$
15. $\Gamma = 0.5$ $\widehat{Z_L} = 3$ $P_{inc} = 120W$ $P_{ref} = 30W$

Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para parámetros eléctricos de líneas de transmisión:

Hayt, William H. Buck, John A. *Teoría Electromagnética*. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 390395. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para modelos de líneas de transmisión:

Hayt, William H. Buck, John A. *Teoría Electromagnética*. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 257-286. ISBN 978-607-15-0783-9.

Kraus, John D., Fleisch, Daniel A. *Electromagnetismo con aplicaciones*. Quinta edición. México: Mc Graw Hill, 1999. Páginas 127-182. ISBN 970-10-2466-4.

Para métodos gráficos – carta de Smith:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. *Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones*. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 572-586. ISBN 968-880-954-3.

HAYT, William H. BUCK, John A. *Teoría Electromagnética*. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 286-295. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para fundamentos de guías de onda:

Feynman, Richard, Leighton, Robert B., Sands, Matthew. *The Feynman lectures on physics-Mainly electromagnetism and matter*. Sexta edición. USA: Addison-Wesley publishing company S.A., 1963. Volumen 2. Capítulo 24. ISBN 0-201-02010-6.

Para guías de onda y fibra óptica:

Kraus, John D., Fleisch, Daniel A. *Electromagnetismo con aplicaciones*. Quinta edición. México: Mc Graw Hill, 1999. Páginas 485-544. ISBN 970-10-2466-4.

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. *Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones*. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 596-632. ISBN 968-880-954-3.

Pontificia Universidad JAVERIANA Cali

con Acreditación Institucional de Alta Calidad

ISBN: 978-958-8347-79-0